
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219491 6

TRAITÉ

D'ANALYSE

14351 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS.
Quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

D'ANALYSE

PAR

H. LAURENT,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> Le calcul de Leibnitz l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles mathématiciens de l'Europe.
>
> DE L'HOSPITAL, *Calcul des infiniment petits.*

TOME V.

CALCUL INTÉGRAL.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

TRAITÉ

D'ANALYSE.

CALCUL INTÉGRAL.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Préliminaires.

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs variables, une ou plusieurs fonctions inconnues de ces variables et leurs dérivées ou leurs différentielles.

Il y a trois espèces d'équations différentielles :

1° Les équations différentielles *ordinaires*, qui ont lieu entre une ou plusieurs fonctions d'une seule variable et leurs dérivées ; l'ordre d'une équation différentielle ordinaire est n, quand elle contient des dérivées d'ordre n sans contenir de dérivées d'un ordre plus élevé.

2° Les équations *aux dérivées partielles*, qui ont lieu entre une ou plusieurs fonctions de plusieurs variables et leurs dérivées ; l'ordre d'une équation aux dérivées partielles est n

quand elle contient des dérivées d'ordre n sans contenir de dérivées d'un ordre plus élevé.

3° Les équations *aux différentielles totales*, qui ont lieu entre une ou plusieurs fonctions de plusieurs variables, les différentielles des variables et les différentielles totales des fonctions. L'ordre d'une équation aux différentielles totales est n quand elle contient des différentielles d'ordre n, sans en contenir d'un ordre plus élevé.

Intégrer, ou résoudre une équation différentielle, ou un système d'équations différentielles, c'est trouver la forme qu'il faut attribuer aux fonctions contenues dans cette équation ou dans ce système, pour que cette équation ou ce système d'équations se réduise à une identité ou à un système d'identités.

Nous démontrerons que les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles admettent ordinairement des solutions, et même en général des solutions en nombre infini. Au contraire, les équations aux différentielles totales n'en admettent que si elles satisfont à certaines conditions.

Quoi qu'il en soit, on peut voir immédiatement que si une équation peut être ramenée à la forme

$$dU = 0,$$

dU désignant une différentielle exacte, elle admettra la solution unique $U = \text{const.}$ C'est souvent en ramenant une équation à cette forme que l'on parvient à l'intégrer, c'est souvent une équation de cette forme que l'on cherche à déduire d'équations données pour en découvrir une solution ([1]).

II. — Théorème fondamental.

Soient t une variable réelle et $x, y, z, \ldots$ un système de ν fonctions inconnues de t. Si les fonctions $\varphi, \chi, \psi, \ldots$

([1]) Le lecteur pourra passer tout de suite au Chap. II s'il voit le Calcul intégral pour la première fois, en admettant pour le moment que toute équation différentielle à une inconnue a une solution renfermant autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans son ordre.

de $x, y, z, \ldots, t$ *restent finies et continues, ainsi que leurs dérivées, quand* $x, y, z, \ldots, t$ *varient dans le voisinage de* $x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0$, *les équations différentielles*

$$(\text{o}) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \quad \ldots$$

admettront une solution telle que, pour $t = t_0$, *on aura* $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \ldots$.

La première démonstration de ce théorème a été donnée par Cauchy : elle se trouve exposée dans le *Calcul différentiel et intégral* de l'abbé Moigno ; la seconde, fondée sur l'emploi des séries, a été également donnée par Cauchy ; elle se trouve également consignée dans l'Ouvrage cité et dans les *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

Dans la démonstration qui va suivre, je désignerai par la lettre θ une quantité comprise entre -1 et $+1$, la même lettre θ pouvant désigner des quantités très différentes : en d'autres termes, la notation θa représentera une quantité comprise entre $-a$ et $+a$, en sorte que l'on aura par exemple

$$a + \theta a = 2\theta a.$$

Nous dirons que les variables $x, y, z, \ldots, t$ sont comprises dans le domaine L si t varie entre $t_0 - k$ et $t_0 + k$, et si en même temps x varie entre $x_0 - a$ et $x_0 + a$, y entre $y_0 - b$ et $y_0 + b$, etc.

Enfin nous supposerons que, les variables restant comprises dans le domaine L, les fonctions $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ et

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, & \varphi_2 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, & \ldots, \\ \chi_1 = \dfrac{\partial \chi}{\partial x}, & \chi_2 = \dfrac{\partial \chi}{\partial y}, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{array}$$

restent finies et continues. Posons maintenant, en appelant h

une quantité très petite, $t_1 = t_0 + h$ et

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0, y_0, \ldots, t)\,dt, \\ y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \chi(x_0, y_0, \ldots, t)\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

appelons M le maximum de φ pris en valeur absolue dans le domaine L, N le maximum de χ, etc. ; il est clair que l'on aura

$$x_1 = x_0 + \theta h\mathrm{M}, \qquad y_1 = y_0 + \theta h\mathrm{N}, \qquad \ldots;$$

si donc h est suffisamment petit, $x_1, y_1, z_1, \ldots$ seront compris dans le domaine L. Supposons qu'il en soit ainsi et posons $t_2 = t_1 + h$ et

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x_1, y_1, \ldots, t)\,dt, \\ y_2 = y_1 + \int_{t_1}^{t_2} \chi(x_1, y_1, \ldots, t)\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

on aura

$$x_2 = x_1 + \theta h\mathrm{M}, \qquad y_2 = y_1 + \theta h\mathrm{N}, \qquad \ldots$$

et, par suite

$$x_2 = x_0 + 2\theta h\mathrm{M}, \qquad y_2 = y_0 + 2\theta h\mathrm{N}, \qquad \ldots;$$

donc, si h est assez petit, $x_2, y_2, z_2, \ldots$ seront également compris dans le domaine L. En continuant ainsi, on posera enfin

$$(n)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = x_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\mathrm{T}} \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}, \ldots, t)\,dt, \\ \mathrm{Y} = y_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\mathrm{T}} \chi(x_{n-1}, y_{n-1}, \ldots, t)\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et l'on aura

$$\mathrm{X} = x_0 + n\theta h\mathrm{M}, \qquad \mathrm{Y} = y_0 + n\theta h\mathrm{N}, \qquad \ldots,$$

et, si h est suffisamment petit, X, Y, Z, ... seront compris dans le domaine L. Il suffira évidemment pour cela que l'on ait en valeur absolue

$$n\theta h M < a, \qquad n\theta h N < b, \qquad \ldots$$

ou, en observant que $nh = T - t_0$,

$$T - t_0 < \frac{a}{M}, \qquad < \frac{b}{N}, \qquad \ldots.$$

Il résulte de là que l'on peut toujours choisir T assez voisin de t_0 pour que, quelque grand que soit n, les quantités T, X, Y, ... soient contenues dans le domaine L. Ajoutons les formules (1), (2), ..., (n); nous aurons

$$(a) \qquad \begin{cases} X = x_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(x_i, y_i, \ldots, t)\,dt, \\ Y = y_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi(x_i, y_i, \ldots, t)\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On simplifiera un peu ces équations en appelant ξ une fonction de t assujettie à rester égale à x_0 quand t varie de t_0 à t_1, à rester égale à x_1 quand t varie de t_1 à t_2, .. , en appelant η une fonction assujettie à rester égale à y_0 quand t varie de t_0 à t_1, à rester égale à y_1 quand t varie de t_1 à t_2, ... et alors en effet les formules (a) s'écriront

$$(b) \qquad \begin{cases} X = x_0 + \int_{t_0}^{T} \varphi(\xi, \eta, \ldots, t)\,dt, \\ Y = y_0 + \int_{t_0}^{T} \chi(\xi, \eta, \ldots, t)\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela posé, je suppose que T soit une valeur fixe de t contenue dans le domaine L : je dis qu'en faisant croître indéfiniment le nombre n les quantités X, Y, Z, ... tendront

vers des limites finies fonctions de T. En effet, comparons d'abord les valeurs (b) avec celles-ci

$$X^0 = x_0 - \int^{T} \varphi(x_0, y_0, \ldots, t)\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous aurons

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} [\varphi(\xi, \eta, \ldots, t) - \varphi(x_0, y_0, \ldots, t)]\,dt$$

ou

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} \left[(\xi - x_0)\,\varphi_1\left(x_0 + \theta\,\overline{\xi - x_0}, y_0 + \theta\,\overline{\eta - y_0}, \ldots, t\right) + \ldots\right] dt.$$

Appelons alors μ une quantité plus grande que la plus grande des quantités $\varphi, \chi, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \chi_1, \chi_2, \ldots$; dans le domaine L, observons ensuite que, $\xi - x_0$ étant une des quantités, $x_i - x_0$ est de la forme $ih\theta M$ ou $nh\theta M$ ou même $nh\theta\mu$; la formule précédente deviendra

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} \nu\, nh\theta\mu^2\,dt = (T - t_0)\nu\, nh\,\theta\mu^2$$

ou encore, en observant que $nh = T - t_0$,

$$X - X^0 = \theta\nu\mu^2(T - t_0)^2, \qquad Y - Y^0 = \theta\nu\mu^2(T - t_0)^2, \qquad \ldots.$$

Ces formules nous font connaître les différences qui existent entre les valeurs de X, Y, ..., calculées en subdivisant et sans subdiviser l'intervalle $T - t_0$.

Partageons maintenant l'intervalle $T - t_0$ en n^2 parties égales, en partageant en n parties égales les intervalles $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, ..., $T - t_{n-1}$ et appelons X^2, Y^2, Z^2, ... les valeurs de X, Y, Z, ... correspondant à ce mode de division : la différence entre X et X^2 sera une somme de n quantités de la forme $\theta\nu\mu^2\left(\frac{T - t_0}{n}\right)^2$; elle sera donc elle-même de la forme $\frac{\theta\nu\mu^2}{n}(T - t_0)^2$. Partageons l'intervalle $T - t_0$ en n^3 parties égales, en subdivisant en n parties égales chacun des nouveaux

intervalles, et appelons X^3, Y^3, Z^3, ... les nouvelles valeurs de X, Y, Z, ..., la différence entre X^2 et X^3 sera de la forme $\frac{\theta\nu\mu^2}{n^2}(T-t_0)^2$, et ainsi de suite; on a donc

$$X - X^0 = \theta\nu\mu^2(T-t_0)^2,$$

$$X^2 - X = \theta\nu\,\frac{\mu^2}{n}(T-t_0)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$X^p - X^{p-1} = \theta\nu\,\frac{\mu^2}{n^{p-1}}(T-t_0)^2$$

et, en ajoutant,

$$X^p - X^0 = \mu^2\nu(T-t_0)^2\left(\theta + \frac{\theta}{n} + \frac{\theta}{n^2} + \ldots + \frac{\theta}{n^{p-1}}\right).$$

Dans cette formule, la lettre θ désigne des quantités différentes, mais toutes comprises entre -1 et $+1$ et bien déterminées; la quantité écrite entre parenthèses est, pour $p=\infty$, une série convergente et, par suite, X^p a une limite pour $p=\infty$, ou, si l'on veut, X, Y, Z, ... ont des limites bien déterminées pour $n=\infty$. (Cauchy démontre que cette limite reste la même quelle que soit la manière dont on fait croître le nombre n, mais ceci est inutile pour le but que nous nous proposons.)

Supposons donc $n=\infty$ et calculons les dérivées des fonctions X, Y, ..., données par les formules (b). On a

$$\Delta X = \int_T^{T+\Delta T} \varphi(\xi, \eta, \ldots, t)\,dt;$$

la quantité placée sous le signe $\int$ diffère infiniment peu de $\varphi(X, Y, \ldots, T)$; on peut donc poser, en appelant ε un infiniment petit,

$$\Delta X = \Delta T[\varphi(X, Y, \ldots, T) + \varepsilon]$$

et

$$\frac{\Delta X}{\Delta T} = \varphi(X, Y, \ldots, T) + \varepsilon,$$

quel que soit n; donc, pour $n = \infty$ et $\Delta T = 0$,

$$\frac{dX}{dT} = \varphi(X, Y, \ldots, T), \qquad \frac{dY}{dT} = \chi(X, Y, \ldots, T), \qquad \ldots;$$

donc :

1° Les quantités X, Y, ..., calculées comme il vient d'être expliqué, satisfont aux équations différentielles (o).

2° Pour $T = t_0$, il est évident qu'elles se réduisent à x_0, y_0, z_0, ... respectivement : notre théorème est donc démontré.

Le théorème précédent établit l'existence d'*une* solution des équations (o) se réduisant pour $t = t_0$ à $x = x_0$, $y = y_0$, ..., mais il n'établit en aucune façon que cette solution est unique : ce point reste donc à éclaircir.

Il n'établit l'existence de la solution qu'autant que dans le domaine L les fonctions $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ et leurs dérivées restent finies et continues; donc, si, en se donnant un domaine L, quelque petits que soient $h, a, b, c, \ldots$, les fonctions $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ ou leurs dérivées pouvaient y devenir infinies, ou indéterminées, ou discontinues, la solution que nous avons trouvée *pourrait* disparaître. Je dis *pourrait,* parce que, dans bien des cas, l'expérience a démontré qu'il existe une solution telle que pour $t = t_0$ on ait $x = x_0$, $y = y_0$, ..., bien que le domaine L dont nous avons parlé n'existe pas.

La démonstration que nous venons de donner est au fond celle de Cauchy simplifiée dans quelques-unes de ses parties.

III. — Continuité des solutions.

Supposons maintenant que les fonctions $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ contiennent un paramètre α : je dis que les solutions des équations

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi, \qquad \frac{dy}{dt} = \chi, \qquad \frac{dz}{dt} = \psi, \qquad \ldots$$

dont nous avons démontré l'existence, et qui pour $t = t_0$ se

réduisent à $x_0, y_0, z_0, \dots$, sont continues par rapport à α. En effet, faisons varier α de la quantité g, et appelons $\varphi', \chi', \psi', \dots$ les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\chi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}, \dots$; $x_1, y_1, z_1, \dots$ croîtront de $h_1, k_1, l_1, \dots$; $x_2, y_2, z_2, \dots$ croîtront de $h_2, k_2, l_2, \dots$, et même, pour plus de généralité, si l'on suppose $x_0, y_0, \dots$ fonctions de α, on pourra supposer que ces quantités elles-mêmes varient de $h_0, k_0, l_0, \dots$; on aura

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0, y_0, \dots, t)\,dt,$$

$$x_1 + h_1 = x_0 + h_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0 + h_0, \dots, t)\,dt,$$

$$y_1 = y_0 + \dots,$$
$$y_1 + k_1 = y_0 + k_0 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et par suite

$$\begin{aligned} h_1 = h_0 + \int_{t_0}^{t_1} [\; & h_0\varphi_1(x_0 + \theta h_0, \dots, \alpha + \theta g, t) \\ & + k_0\varphi_2(x_0 + \theta h_0, \dots, \alpha + \theta g, t) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & + g\varphi'(x_0 + \theta h_0, \dots, \alpha + \theta g, t)]\,dt, \end{aligned}$$
$$k_1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

En appelant alors M une quantité plus grande que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi'$; $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi', \dots$, dans le domaine L, aucune d'elles n'étant supposée infinie, en appelant de plus H_0 une quantité supérieure à la plus grande des quantités $g, h_0, k_0, \dots$, prise en valeur absolue, H_1 une quantité plus grande que la plus grande des quantités $g, h_1, k_1, \dots$, prise en valeur absolue, etc., on aura

$$H_1 = \theta[H_0 + (t_1 - t_0)M(\nu + 1)H_0]$$

ou, en posant $\tau = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots$,

$$H_1 = \theta H_0[1 + \tau M(\nu + 1)];$$

de même

$$H_2 = \theta H_1[1 + \tau M(\nu + 1)],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et, par suite,

$$H_n = \theta H_0[1 + \tau M(\nu + 1)]^n$$

ou

$$H_n = \theta H_0 \left[1 + \frac{M(\nu + 1)(T - t_0)}{n}\right]^n$$

ou enfin

$$H_n = \theta H_0 e^{M(\nu+1)(T-t_0)}.$$

Si donc g est infiniment petit, H_0 le sera, par suite H_n le sera aussi, et il en sera de même de h_n, k_n, l_n, ... et de leurs limites, ce qui prouve bien la continuité des fonctions x, y, z, ..., par rapport à α et en particulier par rapport à x_0, y_0, z_0, ...

Maintenant supposons que, α variant de la quantité g, on représente les accroissements de x, y, z, ... par $x'g$, $y'g$, $z'g$, ..., les équations (1) deviendront

$$\frac{d(x + gx')}{dt} = \varphi(x + gx', \dots, t), \qquad \dots,$$

équations qui, combinées avec (1), donnent

$$\frac{dgx'}{dt} = \varphi(x + gx', \dots, t) - \varphi(x, \dots, t), \qquad \dots$$

ou bien

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = x'\varphi_1 + y'\varphi_2 + \dots + \varphi' + g\omega, \\ \dfrac{dy'}{dt} = x'\chi_1 + y'\chi_2 + \dots + \chi' + g\varpi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

ω, ϖ, ... désignant des fonctions finies de x, y, ..., x', y', ..., α, g. Supposons maintenant dans ces équations (2) x, y, z, ... fonctions de t données par les formules (1) : ces équations définissent un système de valeurs de x', y', z', ..., devenant x'_0, y'_0, ... pour $t = t_0$ (et un seul comme on le verra plus loin), dans un domaine convenablement choisi.

Ces valeurs sont continues par rapport au paramètre g; donc, quand g tend vers o, les solutions tendent vers celles du système

$$\frac{dx'}{dt} = x'\varphi_1 + \ldots + \varphi',$$

$$\frac{dy'}{dt} = x'\chi_1 + \ldots + \chi',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

cela revient à dire que, pour $g = 0$, les quantités $x', y', \ldots$, ont des limites et que, par suite :

Les solutions des équations (1) *ont des dérivées par rapport à α et, en particulier, par rapport à $x_0, y_0, z_0, \ldots$.*

IV. — Propriétés des solutions d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

Nous venons de démontrer que le système de ν équations

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \quad \ldots,$$

$\varphi, \chi, \psi, \ldots$ désignant ν fonctions de $x, y, z, \ldots, t$, admettait une solution renfermant ν constantes arbitraires qui sont les valeurs de $x, y, z, \ldots$, pour $t = t_0$, t_0 désignant une valeur arbitraire de t.

Toute solution des équations (1) renfermant ν constantes arbitraires *distinctes* s'appelle une *intégrale générale* du système (1) ou une solution générale de ce système.

ν constantes sont considérées comme *distinctes* quand on peut les choisir de telle sorte que, pour $t = t_0$, les fonctions $x, y, z, \ldots$ reçoivent des valeurs données arbitrairement; ainsi les ν constantes qui entrent dans une intégrale générale doivent être telles qu'on puisse les choisir de telle sorte que, pour $t = t_0$, $x, y, z, \ldots$ prennent des valeurs données à l'avance $x_0, y_0, z_0, \ldots$.

Soit

$$(2) \qquad \Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_\nu = 0$$

un système d'équations contenant les ν constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$; pour que ces constantes soient distinctes, il faut qu'en y faisant $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, ... on puisse résoudre ces équations par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$; il faut et il suffit donc, pour que les constantes en question soient distinctes, que l'on n'ait pas (t. I, p. 167)

$$\frac{\partial(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu)}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)} = 0.$$

Ceci posé, supposons que l'on résolve les équations (2) par rapport à $a_1, a_2, \ldots$; on obtiendra des résultats de la forme

$$(3) \qquad a_1 = \varpi_1, \qquad a_2 = \varpi_2, \qquad \ldots, \qquad a_\nu = \varpi_\nu,$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ désignant des fonctions de $x, y, z, \ldots, t$. Chacune de ces équations (3) est alors ce que l'on appelle *une intégrale* de système (1) et, en général, toute équation en x, y, z, ..., t, renfermant une constante arbitraire, conséquence de (1), et concourant à former la solution générale, est ce que l'on appelle une *intégrale*.

Théorème I. — *Si, entre les équations* (2) *qui forment une intégrale générale du système* (1) *et leurs dérivées relatives à* t, *on élimine* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, *on trouve les équations* (1) *ou un système équivalent, c'est-à-dire fournissant les mêmes valeurs de* $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$ *en* $x, y, z, \ldots, t$.

En effet, par hypothèse, si l'on tire $x, y, z, \ldots$ de (2) pour porter leurs valeurs dans (1), celles-ci deviennent des identités, c'est-à-dire sont satisfaites, quel que soit t, et aussi quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$; cela revient à dire que, si l'on différentie les équations (2), afin d'en tirer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}, \cdots$, ce qui donne des équations que j'appellerai (E), et si de (E) et de (2) on tire $x, y, \ldots$ et $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$, pour les

porter dans (1), celles-ci deviennent identiques; les équations (1) sont donc des conséquences nécessaires des équations (2) et (E) ne contenant plus $a_1, a_2, \ldots a_\nu$; par définition même, ce sont les résultats de l'élimination de a entre les équations (2) et leurs dérivées. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si l'on se donne ν équations entre $x, y, z, \ldots, t$ renfermant ν constantes arbitraires et si l'on élimine les constantes entre les équations données et leurs dérivées relatives à t, en considérant $x, y, \ldots,$ comme des fonctions de t, on obtiendra des équations différentielles qui auront pour intégrale générale le système des équations proposées.*

Les équations différentielles ainsi obtenues seront en effet des conséquences nécessaires des équations proposées, c'est-à-dire seront satisfaites pour les valeurs de $x, y, z, \ldots$ tirées de ces équations.

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\varpi = a, \tag{4}$$

ϖ désignant une fonction de $x, y, z, \ldots, t$ et a une constante arbitraire, soit une intégrale du système (1) *est que l'on ait identiquement, c'est-à-dire quels que soient $x, y, z, \ldots, t$,*

$$\frac{\partial\varpi}{\partial t} + \frac{\partial\varpi}{\partial x}\varphi + \frac{\partial\varpi}{\partial y}\chi + \frac{\partial\varpi}{\partial z}\psi + \ldots = 0. \tag{5}$$

En effet, dire que (4) est une intégrale de (1), c'est dire qu'il existe $\nu - 1$ autres équations

$$\varpi_1 = a_1, \quad \varpi_2 = a_2, \quad \ldots, \quad \varpi_{\nu-1} = a_{\nu-1}, \tag{6}$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ désignant des fonctions de $x, y, z, \ldots, t$ et $a_1, a_2, \ldots$ des constantes arbitraires, formant avec (4) une intégrale générale de (1).

Si l'on différentie les équations (4), (6), ce qui donne

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varpi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varpi}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial\varpi}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}+\ldots=0,\\ \dfrac{\partial\varpi_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et si de (4), (6), (7) on tire $x, y, \ldots, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \cdots$ pour les porter dans (1), ces formules deviennent identiques, c'est-à-dire ont lieu quel que soit t et aussi quels que soient a_1, $a_2, \ldots$; en d'autres termes, si entre (4), (6), (7), (1) on élimine $x, y, \ldots, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \cdots$, on obtient des identités. Éliminons d'abord $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \cdots$; nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varpi}{\partial t}+\dfrac{\partial\varpi}{\partial x}\varphi+\dfrac{\partial\varpi}{\partial y}\chi+\ldots=0,\\ \dfrac{\partial\varpi_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial x}\varphi+\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial y}\chi+\ldots=0.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces formules doivent devenir des identités en y remplaçant $x, y, \ldots$ par leurs valeurs tirées de (4) et (6); mais, supposant cette substitution faite, elles ont lieu quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées à $a, a_1, a_2, \ldots$. Or on peut choisir $a, a_1, a_2, \ldots$ de telle sorte que $x, y, z, \ldots$ aient des valeurs données arbitraires; les formules précédentes (8) ont donc lieu pour des valeurs arbitraires de $x, y, \ldots$; ce sont donc des identités, même avant la substitution à x, $y, \ldots$ de leurs valeurs tirées de (4) et (6); donc, en particulier, la formule (5) est bien une identité.

Réciproquement, si la formule (5) est une identité, la formule

$$(9)\quad \frac{\partial\varpi}{\partial t}+\frac{\partial\varpi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varpi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\ldots=0,$$

que l'on obtient en y remplaçant $\varphi, \chi, \ldots$ par leurs valeurs

tirées de (1), sera une conséquence de (1) : elle pourra même remplacer l'une des équations (1); or cette formule (9) peut s'écrire

$$d\varpi = 0 \quad \text{ou} \quad \varpi = \text{const.}$$

On en conclut que $\varpi =$ const., ou $\varpi = a$ est une conséquence de (1) et concourt à former son intégrale générale : c'est donc une intégrale de (1).

Corollaire. — Les résultats précédents peuvent s'énoncer d'une manière un peu différente. Dire que (5) est une identité, c'est dire que ϖ est une intégrale de l'équation en u aux dérivées partielles

$$(10) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\chi + \ldots = 0.$$

On peut donc dire que :

La condition nécessaire et suffisante pour que $\varpi =$ const. *soit une intégrale de* (1), *c'est que* ϖ *soit une intégrale de l'équation* (10) *aux dérivées partielles.*

Remarque. — Les constantes a, a_1, ... sur lesquelles nous avons raisonné doivent être arbitraires; ainsi $\varpi = 0$, par exemple, pourrait être une solution de (1), plus exactement pourrait concourir à former une solution de (1), sans que ϖ fût solution de l'équation (10); nos raisonnements supposent essentiellement que la constante a peut être choisie égale à tel nombre que l'on voudra, sans que $\varpi = a$ cesse d'être une intégrale de (1).

V. — Classification des solutions des équations différentielles.

Théorème I. — *Un système de* ν *équations différentielles du premier ordre*

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \quad \ldots$$

n'a qu'une seule intégrale générale.

En d'autres termes, il n'existe qu'une solution de ces équations renfermant ν constantes, pouvant être choisies de telle sorte que, pour $t = t_0$, $x, y, z, \ldots$ prennent des valeurs données $x_0, y_0, z_0, \ldots$.

Considérons en effet une solution renfermant ν constantes distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, cette solution se présentera sous la forme

$$(2) \qquad \Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Pi_\nu = 0,$$

$\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ désignant des fonctions de $x, y, z, \ldots, t, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Or, quelle que soit une solution du système (1), on peut toujours la présenter sous la forme (2), $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ne désignant plus des constantes, mais bien cette fois des fonctions convenables de t; pour déterminer ces fonctions, il suffit, après avoir remplacé, dans (2), $x, y, z, \ldots$ par leurs valeurs en fonction de t, de résoudre les équations (2) par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$.

Différentions les formules (2) et représentons par la notation $\frac{d\Pi}{dt}$ la quantité

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots;$$

nous obtiendrons les formules suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_1}{dt} + \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dt} + \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial a_2}\dfrac{da_2}{dt} + \ldots = 0, \\ \dfrac{d\Pi_2}{dt} + \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dt} + \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial a_2}\dfrac{da_2}{dt} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour que les formules (2) constituent une intégrale du système (1), il faut que les valeurs de $x, y, z, \ldots, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots,$ tirées de (2) et (3), satisfassent à (1); or les valeurs de ces quantités tirées de (2) et de

$$(4) \qquad \frac{d\Pi_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\Pi_2}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\Pi_\nu}{dt} = 0,$$

rendent les équations (1) identiques, c'est-à-dire que ces équations ont lieu, quels que soient les a et, par conséquent, quelles que soient les fonctions de t par lesquelles on remplace les a. Il en résulte que, réciproquement, si l'on remplace dans les formules (4) $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$ par $\varphi, \chi, \ldots$ et $x, y, \ldots$ par leur valeurs tirées de (1) et (2), elles deviennent identiques; les formules (3), quand on y suppose $x, y, \ldots$ remplacées par leurs valeurs tirées de (1) et (2), deviendront également identiques, en sorte que l'on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_1}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt}+\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_2}\frac{da_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_\nu}\frac{da_\nu}{dt}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt}+\frac{\partial \Pi_\nu}{\partial a_2}\frac{da_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial \Pi_\nu}{\partial a_\nu}\frac{da_\nu}{dt}=0; \end{array}\right.$$

telles sont les équations qui détermineront $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. On en tire, en général,

$$\frac{da_1}{dt}=0, \qquad \frac{da_2}{dt}=0, \qquad \ldots, \qquad \frac{da_\nu}{dt}=0,$$

ce qui donne $a_1 =$ const., $a_2 =$ const., ... et l'on retombe sur la solution générale d'où l'on était parti; mais on peut encore satisfaire aux équations (5) en supposant

$$(6)\qquad \frac{\partial(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu)}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)}=0.$$

Cette équation détermine l'une des quantités a en fonction des $\nu-1$ autres : les équations (5) se réduisent à $\nu-1$ distinctes; elles sont différentielles et du premier ordre et font connaître avec (6) les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. On peut encore satisfaire aux équations (5) en annulant non plus seulement leur déterminant, mais ses mineurs, ce qui revient à annuler deux de ses mineurs; on a alors deux équations qui, jointes aux $\nu-2$ auxquelles se réduisent les équations (5),

feront encore connaître les valeurs de a_1, a_2, ..., et ainsi de suite :

1° Supposons que le système (1) se réduise à une seule équation, et son intégrale générale à $\Pi_1 = 0$, contenant la constante a, il pourra exister en outre la solution $\Pi_1 = 0$ dans laquelle a sera tiré de l'équation $\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_1} = 0$, à laquelle, dans ce cas, se réduit le système (5), si cette équation $\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_1} = 0$ a une solution. Le système (1) réduit à une équation unique n'aura donc qu'une solution renfermant une constante arbitraire, en un mot, qu'une solution générale.

2° Supposons le système (1) composé de deux équations : soient $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ sa solution générale, renfermant les constantes a_1 et a_2 ; il pourra avoir une autre solution donnée par les formules

$$\frac{\partial(\Pi_1, \Pi_2)}{\partial(a_1, a_2)} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_1} \frac{da_1}{dt} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial a_2} \frac{da_2}{dt} = 0$$

ou par les formules

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi_2}{\partial a_1} = 0, \qquad \dots$$

En aucun cas, ces solutions, fournies au plus par *une* équation différentielle, ne pourront renfermer plus d'une constante arbitraire.

3° Si le système (1) renferme trois équations, outre la solution générale, il pourra en exister d'autres, données au plus par deux équations différentielles et ne pouvant pas par suite contenir plus de deux constantes arbitraires, et ainsi de suite.

Donc, enfin, un système de ν équations du premier ordre ne peut avoir plus d'une intégrale contenant ν constantes arbitraires. C. Q. F. D.

Mais la démonstration précédente met en évidence une

foule d'autres solutions qui ne rentrent pas dans l'intégrale générale, c'est-à-dire que l'on ne peut pas en déduire en donnant aux constantes des valeurs numériques particulières : on appelle ces solutions *intégrales singulières,* en réservant le nom d'*intégrales particulières* (¹) à celles que l'on déduit de l'intégrale générale en attribuant des valeurs numériques déterminées aux constantes arbitraires qu'elle contient.

VI. — Des solutions singulières.

En résumé, nous venons de voir que le système des ν équations différentielles du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi, \qquad \frac{dy}{dt} = \chi, \qquad \frac{dz}{dt} = \psi, \qquad \dots$$

avait :

1° Une solution, son intégrale générale, composée de ν équations

$$(2) \qquad \Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \dots, \qquad \Pi_\nu = 0,$$

renfermant ν constantes arbitraires distinctes, $a_1, a_2, \dots, a_\nu$;
2° une solution singulière donnée par l'équation

$$(3) \qquad R = 0,$$

et $\nu - 1$ des équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dt} + \dots + \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial a_\nu}\dfrac{da_\nu}{dt} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Pi_\nu}{\partial a_1}\dfrac{da_1}{dt} + \dots + \dfrac{\partial \Pi_\nu}{\partial a_\nu}\dfrac{da_\nu}{dt} = 0, \end{array} \right.$$

où $x, y, \dots$ sont censés remplacés par leurs valeurs tirées

(¹) Quelques auteurs désignent sous le nom de *solutions particulières* celles que nous appelons *singulières*.

de (2) et où R désigne le déterminant

$$\frac{\partial(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_\nu)}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)}.$$

Cette solution pourra ne pas exister : c'est ce qui arriverait si le système (3), (4) présentait quelque incompatibilité.

3° Une solution singulière donnée par deux des équations

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a_1}} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a_2}} = 0, \qquad \ldots$$

et par $\nu - 2$ des équations (4); cette solution pourra de même ne pas exister, et ainsi de suite.

Toutes ces solutions pourront ne pas exister : ainsi, par exemple, si $\mathrm{R} = 0$ était une équation absurde, telle que $1 = 0$ par exemple, il n'y aurait pas de solution singulière. En aucun cas, les solutions singulières ne seront en nombre infini, car R ne peut être identiquement nul, sans quoi les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ ne seraient pas distinctes (p. 12).

Indépendamment de ces solutions singulières que l'on peut déduire de l'intégrale générale et que nous appellerons, pour abréger, *solutions de première espèce*, il peut exister une seconde espèce de solutions singulières, et, en effet, nous avons admis tacitement dans nos raisonnements que les fonctions $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ et leurs dérivées étaient finies, continues et bien déterminées quand on supposait $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, ... Quand ces hypothèses ne se trouvent pas vérifiées, nos raisonnements sont en défaut et les conclusions que nous en avons tirées peuvent être inexactes. L'expérience prouve effectivement que l'on peut trouver des solutions singulières en écrivant que $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ ou leurs dérivées relatives à $x, y, z, \ldots$ sont infinies ou indéterminées.

Enfin nous avons supposé les équations différentielles pro-

posées résolues (théoriquement au moins) par rapport à $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ...; si elles ne pouvaient pas fournir des valeurs bien déterminées pour ces quantités, nos conclusions tomberaient en défaut.

Remarque. — Lorsque l'intégrale générale se présente sous la forme

$$\varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varpi_\nu = 0,$$

les fonctions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ ne renfermant chacune qu'une seule constante arbitraire, les solutions singulières prennent une forme simple à remarquer. Si, par exemple, ϖ_1 ne contient que a_1, si ϖ_2 ne contient que a_2, ... le déterminant $\frac{\partial(\Pi_1, \Pi_2, \ldots)}{\partial(a_1, a_2, \ldots)}$ se réduit au produit

$$\frac{\partial\varpi_1}{\partial a_1} \frac{\partial\varpi_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial\varpi_n}{\partial a_n},$$

de sorte que l'on peut obtenir des solutions singulières en tirant quelques-unes des quantités $a_1, a_2, \ldots$ ou toutes ces quantités des équations

$$\frac{\partial\varpi_1}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial\varpi_2}{\partial a_2} = 0, \qquad \ldots.$$

Leibnitz en 1694, Taylor en 1715, et surtout Clairaut (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1734) paraissent être les premiers qui aient remarqué les solutions singulières. Euler s'est occupé à plusieurs reprises de la question des solutions singulières (*Exposition de quelques paradoxes de Calcul intégral,* Acad. de Berlin, 1756. — *Mechanica*, t. II, art. 268, 303, 335. — 1er Vol. de *Calcul intégral*). Laplace, en 1772, a inséré un Mémoire dans le Recueil de l'Académie des Sciences, *Sur les solutions particulières des équations différentielles.* — Condorcet, *Mémoires de Turin*, t. IV.

Lagrange est un de ceux qui ont le plus approfondi la théorie des solutions singulières (voir ses *Œuvres complètes*).

Citons encore un Mémoire de Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XIII), de M. Catalan (*Comptes rendus,* t. LXI, 1870), de M. Darboux (*ibid.,* 1870; reproduit dans le *Bulletin* en 1873), de M. J.-A. Serret (*Journal de Liouville,* 1re série, t. XVIII).

Mais la théorie exacte et complète des solutions singulières ne pouvait être solidement établie qu'à la suite d'une démonstration rigoureuse de l'existence des intégrales des équations différentielles; la théorie des solutions singulières devait résulter de la discussion de cette démonstration, et l'on peut dire que c'est à Cauchy que l'on doit la véritable théorie des solutions singulières; on n'a ajouté que fort peu de chose à ce que l'illustre auteur a fait connaître sur cette matière. (Voir le *Calcul différentiel et intégral* de l'abbé Moigno, où sont résumés les travaux de Cauchy.)

VII. — Recherche directe des solutions singulières.

Pour trouver les intégrales singulières de première espèce, nous sommes parti d'une intégrale générale

$$(1) \qquad \Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Pi_\nu = 0,$$

et nous y avons remplacé $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ par des fonctions telles que les valeurs de $x, y, \ldots$ tirées de (1) satisfaisaient encore aux équations différentielles à intégrer. Or on peut choisir $a_1, a_2, \ldots$ constants et tels que, pour $t = t_0$, l'x, l'y, le z, ... de l'intégrale générale soient les mêmes que l'x, l'y, le z, ... d'une intégrale singulière; mais alors, en calculant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... au moyen des formules (1), soit en y regardant les a comme des constantes, soit en les regardant comme des va-

riables, ils auront les mêmes valeurs, puisque l'on a

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt}+\frac{\partial \Pi_i}{\partial a_2}\frac{da_2}{dt}+\ldots=0,$$

pour la solution singulière aussi bien que pour la solution générale, et que $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$ seront dans l'un et l'autre cas donnés par les formules (1) et

$$\frac{d\Pi_1}{dt}=0,\qquad \frac{d\Pi_2}{dt}=0,\qquad \ldots,\qquad \frac{d\Pi_\nu}{dt}=0,$$

où les a et les $x, y, z, \ldots, t$ ont les mêmes valeurs numériques ; il en résulte que :

Une intégrale singulière de première espèce a les mêmes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \cdots$ *que l'intégrale générale avec laquelle elle coïncide.*

De là un moyen de se procurer les intégrales singulières de première espèce, sans qu'il soit besoin de connaître l'intégrale générale. Elles se composeront des valeurs de $x, y, z, \ldots$ pour lesquelles $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \cdots$ seront susceptibles de deux systèmes de valeurs égales ; en d'autres termes, les équations différentielles qui donnent $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$ devront avoir une solution double. Soient

$$(2)\qquad F_1=0,\qquad F_2=0,\qquad \ldots,\qquad F_\nu=0$$

ces équations, F_1, F_2, ... désignant des fonctions de $x, y, z, \ldots, t, x'=\frac{dx}{dt}, y'=\frac{dy}{dt}, \cdots$; l'x, l'y, ... de la solution singulière satisferont à l'équation

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_\nu)}{\partial(x', y', \ldots)}=0.$$

Cette équation permettra d'éliminer une des quantités $x', y', z', \ldots$ On n'aura plus alors qu'à intégrer un système à ν équations dont $\nu-1$ seulement seront différentielles : la solution

singulière renfermera alors $\nu - 1$ constantes arbitraires. On peut trouver les autres solutions singulières d'une façon analogue : pour trouver celle qui renferme $\nu - 2$ constantes, on égalera à zéro non seulement le déterminant $\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots)}{\partial(x', y', \ldots)}$, mais ses mineurs, ce qui fera deux équations distinctes; on s'en servira pour éliminer de (2) x' et y' par exemple; l'intégration des équations résultantes fournira la solution demandée si elle existe, bien entendu.

Remarque. — La méthode que nous venons d'indiquer conduit aux solutions singulières de première espèce quand elles existent; mais il sera indispensable de vérifier que les résultats trouvés par cette méthode fournissent bien des intégrales de l'équation proposée : j'ajoute même que, le plus souvent, lors même qu'il existera des solutions singulières, la méthode fournira des solutions étrangères.

Et en effet, en écrivant que le système (2) admet une solution multiple, nous exprimons qu'il existe deux solutions du système (2) présentant les mêmes $x', y', z', \ldots$; l'ensemble des valeurs de $x, y, z, \ldots$, pour lesquelles cette circonstance se présente, peut fort bien ne pas satisfaire aux équations (2), et en effet nous avons seulement remarqué que la solution singulière de première espèce était telle que ses $x', y', z', \ldots$ étaient les mêmes que celle de l'intégrale générale avec laquelle elle coïncide; mais la réciproque n'a pas lieu nécessairement : nous le vérifierons sur des exemples.

VIII. — Interprétation géométrique pour le cas d'une seule équation.

Considérons une seule équation différentielle

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y, y') = 0.$$

Soit

$$(2) \qquad F(x, y, a) = 0$$

son intégrale générale; elle représente, quand on y considère x et y comme les coordonnées d'un point, l'équation d'une famille de courbes dont le paramètre a est la constante d'intégration, (1) est alors *l'équation différentielle de cette famille de courbes.*

Reprenons la théorie des solutions singulières dans le cas particulier qui nous occupe.

Supposons que a, au lieu de désigner une constante, représente une fonction de x (ou de y); pour que l'équation (2) fournisse encore une intégrale de (1), il faudra que les valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$ tirées de (2) rendent (1) identique, c'est-à-dire y satisfassent quel que soit x. Or $\frac{dy}{dx}$ se calculera en différentiant (2), ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial a}\,da = 0.$$

Si l'on détermine alors a par l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0,$$

l'équation (3) se réduira à

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0,$$

comme dans le cas où a est constant; si alors on remplace dans (1) y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs tirées de (2) et (5), cette équation, étant satisfaite quelle que soit la constante a, sera encore satisfaite quand a sera fonction de x tirée de (4), puisqu'en définitive elle ne contient pas a. Ainsi (2) sera encore une solution de (1), si a, au lieu d'être constante, est fonction de x et y tirés de (4). Cela revient à dire que la résultante des équations $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ est une solution singulière de (1). Cette solution singulière représente l'enveloppe des courbes (2). Ainsi :

La solution singulière de première espèce d'une équa-

tion différentielle unique du premier ordre représente l'enveloppe des courbes représentées par l'intégrale générale.

Cette conclusion est soumise à des restrictions : 1° si les équations (2) et (4) sont incompatibles, il n'y a ni enveloppe, ni solution singulière.

2° Si l'équation (3) et l'équation (5) sont illusoires, elles ne fournissent pas, pour la valeur de a tirée de (4), de valeur pour $\frac{dy}{dx}$, parce que l'on a

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

il n'y a pas de raison alors pour que la résultante de (2) et (4) fournisse une solution de (1) [il pourra se faire dans quelques cas que cette résultante soit encore une solution, et il faudra dans chaque cas particulier examiner directement ce qui a lieu]; la résultante de (2) et de (4) représente encore un lieu d'*intersections successives* des courbes (2), mais non plus une enveloppe proprement dite, en ce sens que cette courbe ne touche plus nécessairement les courbes intégrales. Les équations (6) ayant lieu, le point (x, y) sera sur la courbe qui représente l'intégrale générale un point singulier, en sorte qu'en éliminant a entre $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, on obtiendra le lieu des points singuliers de la famille de courbes représentées par l'intégrale générale $F = 0$; mais il semble que ce soit là une circonstance exceptionnelle et que la résultante de $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ donne généralement une solution singulière représentant l'enveloppe des courbes $F = 0$.

D'un autre côté, on pourra trouver la solution singulière si elle existe, en éliminant y' entre l'équation (1) et sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, qui exprime que l'équation $f = 0$ fournit deux valeurs égales de y'.

Mais, pour que la solution singulière existe, il faudra que

la valeur de y tirée de la résultante de $f=0$ et de $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$ satisfasse à l'équation (1) et qu'alors on ait identiquement, c'est-à-dire, quel que soit x, quand y sera déduit de la résultante de $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$,

$$f(x, y, y')=0.$$

Or de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

on va tirer $y'=\varphi(x, y)$ et la résultante de cette équation et de $f=0$ sera

$$f(x, y, \varphi)=0.$$

Tirons-en y'; à cet effet, différentions-la, nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'\right]=0.$$

Mais $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ est nul, car il est égal à $\frac{\partial f}{\partial y'}$, y' désignant précisément ici la fonction φ; on doit donc avoir pour l'y' de la solution singulière

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0;$$

ainsi l'y et l'y' de la solution singulière devront satisfaire aux trois équations

$$(7) \qquad f=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

L'une de ces équations devra donc rentrer dans les deux autres : tout porte à croire que cela n'aura pas généralement lieu. Ainsi, d'après cette petite discussion, il semble qu'en écrivant $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$ on exprime que la courbe intégrale a deux tangentes confondues, c'est-à-dire un rebroussement, et qu'en éliminant y' on trouve le lieu de ce rebroussement et non pas une solution singulière.

Ce résultat paraît en contradiction avec celui que nous

avons trouvé tout à l'heure, qui nous porte à croire que la solution singulière existe presque toujours, et, d'ailleurs, il semble étonnant que les courbes intégrales présentent *ordinairement* toutes des rebroussements, et l'on serait presque tenté de croire qu'effectivement les équations (7) se réduisent à deux distinctes.

C'est Clebsch qui a expliqué ce paradoxe, en faisant observer que, étant donnée l'équation intégrale $F(x, y, a) = 0$, l'équation différentielle obtenue en éliminant a entre $F = 0$ et $\frac{dF}{dx} = 0$ n'avait pas toute sa généralité quand $F(x, y, a)$ était quelconque; et qu'en donnant au contraire à $f(x, y, y')$ toute sa généralité, a n'entrait pas d'une façon arbitraire dans F. Il y a là un phénomène analogue à celui qui se présente dans la théorie des figures corrélatives. La figure corrélative de la figure la plus générale de son ordre n'est pas la plus générale de sa classe, et *vice versa*.

Ainsi notre paradoxe s'expliquera, en admettant que les formes les plus générales de F et f ne se correspondent pas.

M. Darboux avait essayé d'expliquer ce paradoxe en admettant que toutes les équations différentielles n'avaient pas nécessairement une intégrale de la forme $F(x, y, a) = 0$, F désignant une fonction bien déterminée, et que celles qui n'admettaient pas de solution singulière n'avaient pas la forme en question : l'explication de M. Clebsch nous paraît être la vraie.

Cherchons le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales, c'est-à-dire le lieu des points où $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = 0$. A cet effet, différentions (1) et posons $\frac{dy'}{dx} = 0$, nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

On voit donc que, si ce lieu coïncide avec le lieu des points pour lesquels $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, les équations (5) auront lieu en même

temps, et la solution singulière existera. On conçoit, en effet, que, quand sur une courbe variable de forme un point d'inflexion vient se confondre avec un rebroussement, inflexion et rebroussements disparaissent pour faire place à un point ordinaire.

REMARQUE. — Nous avons fait observer (p. 24) que la méthode donnée pour la recherche directe des intégrales singulières conduisait souvent à des solutions étrangères : les considérations géométriques rendent compte de ce fait; en effet, la résultante des équations

$$f(x, y, y') = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

fera connaître, outre l'enveloppe des courbes intégrales de $f = 0$ si elle existe, le lieu des points où deux courbes intégrales se touchent (*voir* l'*Exercice* 9, à la fin du Chapitre).

IX. — Reconnaître si une solution est particulière ou singulière.

Étant donnée une solution d'une ou plusieurs équations différentielles, ne renfermant pas autant de constantes qu'il doit en entrer dans la solution générale, il y a lieu de se demander si cette intégrale est singulière ou particulière.

Lorsque l'on connaît l'intégrale générale, la solution de cette question est facile : considérons, en effet, les ν équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, \ldots, t), \qquad \frac{dy}{dt} = \chi(x, y, \ldots, t), \qquad \ldots,$$

et soient, a_1, a_2, ... désignant les constantes d'intégration,

$$(2) \qquad \Phi(x, y, \ldots, t; a_1, a_2, \ldots) = 0, \qquad X = 0, \qquad \ldots$$

les équations qui forment l'intégrale générale. Si une équation

$$(3) \qquad E = 0.$$

entre x, y, z, ..., t, est susceptible de faire partie d'une solution particulière, il faudra que les valeurs de x, y, ... tirées de (2) et portées dans (3) rendent celle-ci identique pour certaines valeurs de a_1, a_2, ..., c'est-à-dire y satisfassent quel que soit t. Donc, si l'on élimine x, y, z, ... entre (2) et (3), t devra disparaître de la résultante, pour certaines valeurs de a_1, a_2, ... Telle est la condition pour que $E = 0$ fasse partie d'un groupe d'équations constituant une solution particulière et non singulière.

La question est beaucoup plus difficile à trancher quand on ne connaît pas l'intégrale générale du système (1). Voici quelques généralités à cet égard.

D'abord, si une équation donnée $E = 0$ renferme une constante arbitraire α, on la résoudra par rapport à cette constante α et on la mettra sous la forme

$$u = \alpha;$$

si alors $u = \alpha$ est susceptible de faire partie de l'intégrale générale, nous avons vu que l'on devait avoir identiquement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \chi \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots = 0,$$

et comme d'ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial t} : \frac{\partial E}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial E}{\partial x} : \frac{\partial E}{\partial \alpha}, \qquad \ldots,$$

on pourra remplacer cette identité par l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \varphi + \frac{\partial E}{\partial y} \chi + \ldots = 0,$$

qui devra devenir identique par l'élimination de α au moyen de $E = 0$, si $E = 0$ peut concourir à former l'intégrale générale. Si cela n'a pas lieu, $E = 0$ fait partie d'une solution particulière ou d'une solution singulière.

Considérons maintenant une intégrale avec ou sans constante arbitraire, et supposons que l'on en ait tiré les valeurs de x, y, z, ... sous la forme

$$(4) \qquad x = \lambda(t), \qquad y = \mu(t), \qquad \ldots$$

supposons que les équations (2) résolues par rapport à $x, y, \ldots$ donnent

$$(5) \qquad x = \Lambda(a_1, a_2, \ldots, t), \qquad y = \mathrm{M}(a_1, \ldots, t), \qquad \ldots.$$

Posons

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda', \qquad \frac{d\mu}{dt} = \mu', \qquad \ldots, \qquad \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda', \qquad \ldots;$$

nous tirerons de (4) et (5) les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \cdots$, et nous les porterons dans (1). Ces équations devant être satisfaites, on aura

$$\Lambda' = \varphi(\Lambda, \mathrm{M}, \ldots, t), \qquad \mathrm{M}' = \chi(\Lambda, \mathrm{M}, \ldots, t), \qquad \ldots,$$
$$\lambda' = \varphi(\lambda, \mu, \ldots, t), \qquad \mu' = \chi(\lambda, \mu, \ldots, t), \qquad \ldots,$$

et par suite, par soustraction,

$$\Lambda' - \lambda' = \varphi(\Lambda, \mathrm{M}, \ldots, t) - \varphi(\lambda, \mu, \ldots. t), \qquad \ldots$$

ou

$$\frac{\Lambda' - \lambda'}{\Lambda - \lambda} = \frac{\varphi(\Lambda, \mathrm{M}, \ldots, t) - \varphi(\lambda, \mu, \ldots. t)}{\Lambda - \lambda}, \qquad \ldots,$$

et, en intégrant de t_0 à t,

$$(6) \quad \log\frac{\Lambda(t) - \lambda(t)}{\Lambda(t_0) - \lambda(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi(\Lambda, \ldots, t) - \varphi(\lambda, \ldots, t)}{\Lambda - \lambda}\, dt \ldots.$$

Maintenant on peut disposer des constantes $a_1, a_2, \ldots$ de telle sorte que $\Lambda(t_0) = \lambda(t_0)$; si la dérivée de $\varphi(\lambda, \ldots, t)$ relative à λ pour $t = t_0$ n'est pas infinie, le second membre de la formule précédente sera fini. Il en sera de même du premier, ce qui exige que, d'après la manière dont ont été choisies les constantes, on ait

$$\Lambda(t) = \lambda(t);$$

donc, *si les dérivées partielles* $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\chi}{\partial y}, \cdots$ *ne sont pas infinies, pour les valeurs de* $x, y, \ldots$ *tirées de la solution donnée, cette solution ne sera pas singulière.*

Supposons maintenant la quantité placée sous le signe $\int$ dans la formule (6) infinie pour $t = t_0$: on pourra supposer t très voisin de t_0 ; il est clair alors que, si les intégrales définies singulières

$$(7) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\varphi(\Lambda, \mathrm{M}, \ldots, t) - \varphi(\lambda, \mu, \ldots, t)}{\Lambda - \lambda}\, dt, \quad \ldots$$

sont nulles, les intégrales

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi(\Lambda, \ldots) - \varphi(\lambda, \ldots)}{\Lambda - \lambda}\, dt, \quad \ldots,$$

seront finies et l'on aura $\Lambda(t) = \lambda(t)$ pour les valeurs des constantes, telles que $\Lambda(t_0) = \lambda(t_0)$. Ainsi :

Pour reconnaître si une intégrale est particulière ou singulière, il suffira de discuter les intégrales définies singulières, telles que (7).

Cette méthode a été indiquée par Cauchy (Moigno, *Calcul différentiel et intégral*); elle ne lève pas, comme l'on voit, toutes les difficultés; d'ailleurs φ, χ, ... ont été supposés bien déterminés.

Les recherches exposées dans ce paragraphe ne sont pas inutiles, car il arrive souvent qu'une solution trouvée par les procédés applicables à la recherche des solutions singulières est une intégrale particulière : cela arrive quand, dans une équation du premier ordre par exemple, les courbes intégrales ont l'une d'elles pour enveloppe.

X. — Cas où la variable est imaginaire.

Pour démontrer l'existence des solutions du système

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \ldots,$$

nous avons supposé $x, y, \ldots, t, \varphi, \chi, \ldots$ réels. Supposons maintenant que ces quantités soient imaginaires, et faisons

varier t le long d'un chemin t_0T bien déterminé. Pour cela, on fera

$$t = \sigma + \tau\sqrt{-1},$$

σ et τ désignant des fonctions convenablement choisies d'un paramètre θ, par exemple; $x, y, \ldots$ deviendront des fonctions $x_1 + x_2\sqrt{-1}, y_1 + y_2\sqrt{-1}, \ldots$ et $\varphi, \chi, \ldots$ des expressions de la forme $\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1}, \chi_1 + \chi_2\sqrt{-1}, \ldots$, et les équations (1) seront remplacées par

$$\frac{dx_1 + dx_2\sqrt{-1}}{d\theta} = (\sigma' + \tau'\sqrt{-1})(\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1}),$$
$$\frac{dy_1 + dy_2\sqrt{-1}}{d\theta} = (\sigma' + \tau'\sqrt{-1})(\chi_1 + \chi_2\sqrt{-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces ν équations se décomposeront en 2ν équations différentielles par rapport aux 2ν fonctions $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots$ de θ admettant une solution se réduisant à $x_1^0, x_2^0, y_1^0, \ldots$ pour $\theta = \theta^0$, ce qui revient à dire que les équations (1) ont une solution se réduisant à $x_0, y_0, \ldots$ pour $t = t_0$ quand on fait suivre à la variable t un chemin bien déterminé.

Lorsque la variable t se rend de t_0 à T par un chemin indéterminé, les valeurs de $x, y, z, \ldots$ peuvent être elles-mêmes indéterminées, comme nous l'avons déjà observé sur l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

qui donne pour x l'intégrale $\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$, dont la valeur dépend du contour d'intégration suivi pour aller de t_0 en t; mais, pour un chemin donné, les équations (1) admettront en général des solutions bien déterminées.

L'étude du cas où la variable passe par des valeurs imaginaires présente des difficultés particulières; toutefois la synecticité des fonctions intégrales peut être établie pour certaines limites, à l'aide du procédé imaginé par Cauchy et

perfectionné par MM. Briot et Bouquet, que nous avons exposé à la page 127 du tome IV.

XI. — Équations d'ordre supérieur au premier.

Un système d'équations différentielles dont une partie ou la totalité est d'ordre supérieur au premier peut être ramené à un système d'équations du premier ordre.

En effet, considérons le système

$$(1) \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_\nu = 0$$

et supposons qu'il contienne des dérivées au plus d'ordre m par rapport à x, d'ordre n par rapport à y, etc. Posons, en appelant t la variable indépendante,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{llll} x' = \dfrac{dx}{dt}, & x'' = \dfrac{dx'}{dt}, & \ldots, & x^{(m)} = \dfrac{dx^{(m-1)}}{dt} \\ y' = \dfrac{dy}{dt}, & y'' = \dfrac{dy'}{dt}, & \ldots, & y^{(n)} = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dt} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots; \end{array} \right.$$

les équations (1), (2) formeront un système d'équations du premier ordre par rapport à $x, x', \ldots, x^{(m-1)}, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \ldots$. L'intégrale générale d'un pareil système renfermera

$$\nu + m - 1 + n - 1 + \ldots = m + n + \ldots$$

constantes arbitraires.

En particulier, si l'on considère une équation unique d'ordre m, son intégrale renfermera m constantes arbitraires.

Il résulte de là que :

Si, entre les équations qui constituent l'intégrale générale d'un système d'équations différentielles et leurs dérivées d'un ordre suffisamment élevé, on élimine les constantes, on doit retomber sur les équations différentielles proposées.

Des équations différentielles n'ont qu'une seule inté-

grale générale; elles peuvent avoir en outre des solutions singulières renfermant moins de constantes arbitraires que l'intégrale générale.

Lorsque ν *équations entre les* ν *fonctions* x, y, z, ... *et la variable* t *renferment* $m+n+\ldots$ *constantes arbitraires et que les valeurs de* x, y, z, ... *tirées de ces équations satisfont identiquement aux équations* (1), *ces équations constituent l'intégrale générale du système* (1).

On appelle intégrale du système (1) toute intégrale du système (1), (2). Ainsi, si l'on suppose le système (1), (2) intégré complètement et résolu par rapport aux constantes d'intégration, une des équations

$$\alpha = \varpi$$

ainsi obtenues est une intégrale de système (1). Et en effet, la connaissance de toutes ces intégrales élémentaires équivaut évidemment à la connaissance de l'intégrale générale des équations (1).

Ce que nous venons de dire s'appliquerait au cas où parmi les équations (1) il y aurait des équations d'ordre zéro, c'est-à-dire ne contenant pas de dérivées.

Les équations d'ordre supérieur peuvent évidemment avoir des solutions singulières que l'on trouvera aisément en convertissant ces équations en équations du premier ordre par l'introduction des nouvelles fonctions x', x'', ..., y', y'', ... comme nous venons de l'indiquer.

Supposons, par exemple, que l'on se donne l'équation unique

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

et que, l'ayant remplacée par

$$F\left(x, y, y', \frac{dy'}{dx}\right) = 0, \qquad x' = \frac{dy}{dx},$$

on ait trouvé les intégrales

$$f_1(x, y, y', a, b) = 0, \qquad f_2 = 0,$$

a et b désignant des constantes arbitraires; les équations

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t} = 0$$

pourront fournir une solution singulière, et il en sera de même des équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial b} = 0.$$

Enfin l'équation proposée pourra, indépendamment de ces solutions de première espèce, en avoir de seconde espèce.

Nous terminerons ces considérations en faisant connaître une formule générale pour le changement de variables; souvent, en effet, on parvient à intégrer les équations différentielles en leur faisant subir un changement de variable pouvant amener des simplifications dans leur forme.

XII. — Changement de variable dans les équations différentielles.

Il y a souvent avantage, quand on veut intégrer des équations différentielles, à les simplifier au moyen d'un changement de variable : ce changement pourra se faire à l'aide des méthodes exposées dans le Calcul différentiel, mais nous croyons devoir faire connaître une formule générale remplissant ce but et due à Wronski.

Considérons la fonction $y = f(x)$ et proposons-nous de calculer $f^n(x)$ ou $\frac{d^n y}{dx^n}$, en prenant une nouvelle variable quelconque t; à cet effet, observons que

$$f(x) = f(z) + (x - z)f'(z) + \ldots + (x - z)^n \frac{f^n(z)}{n!} + (x - z)^{n+1} R,$$

R désignant une quantité finie pour $z = x$, et par suite

$$f(x) - f(z) - (x - z)f'(z) - \ldots - (x - z)^n \frac{f^n(z)}{n!},$$

étant égal à $(x-z)^{n+1}R$, s'annulera pour $x=z$, ainsi que ses n premières dérivées prises non seulement par rapport à x, mais aussi par rapport à t, ainsi que le prouve l'application de la formule de Leibnitz à la différentiation du produit

$$R(x-z)(x-z)\ldots(x-z);$$

on aura donc, en différentiant par rapport à t et en remplaçant $f(x)$ par y,

$$\frac{dy}{dt}-\frac{d}{dt}(x-z)f'(z)-\ldots-\frac{d}{dt}(x-z)^n\frac{f^n(z)}{n!}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dt^n}-\frac{d^n}{dt^n}(x-z)f'(z)-\ldots-\frac{d^n}{dt^n}(x-z)^n\frac{f^n(z)}{n!}=0;$$

on tire de là

$$(1)\qquad \frac{f^n(z)}{n!}=\Big/^{x=z}\frac{N}{D},$$

N et D désignant les déterminants

$$N=\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}(x-z) & \frac{d}{dt}(x-z)^2 & \ldots & \frac{dy}{dt} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^n}{dt^n}(x-z) & \frac{d^n}{dt^n}(x-z)^2 & \ldots & \frac{d^ny}{dt^n} \end{vmatrix},$$

$$D=\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}(x-z) & \frac{d}{dt}(x-z)^2 & \ldots & \frac{d}{dt}(x-z)^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^n}{dt^n}(x-z) & \frac{d^n}{dt^n}(x-z)^2 & \ldots & \frac{d^n}{dt^n}(x-z)^n \end{vmatrix}.$$

Si dans le déterminant N on développe $(x-z)^2, (x-z)^3, \ldots$, en combinant les colonnes on aura, au signe près, en négligeant les facteurs dt,

$$N=\begin{vmatrix} dx & 0 & 0 & \ldots & dy \\ d^2x & d^2x^2 & 0 & \ldots & d^2y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d^nx & d^nx^2 & d^nx^3 & \ldots & d^ny \end{vmatrix}.$$

Si dans D on observe que

$$d^i(x-z)^i = \sum \frac{i!}{\alpha!\beta!\dots} d^\alpha(x-z)d^\beta(x-z)\dots$$
$$= i![d(x-z)]^i = i!(dx)^i,$$
$$d^{i+j}(x-z)^i = 0,$$

tous les termes situés au-dessus de la diagonale seront nuls, et l'on aura, au signe près,

$$D = 1!2!\dots n!\,dx^{\frac{n(n+1)}{2}};$$

la formule (1) devient alors

$$\frac{f^n(z)}{1.2.3\dots n} = \Bigg/^{x=z} \frac{\begin{vmatrix} dx & 0 & 0 & \dots & dy \\ d^2x & d^2x^2 & 0 & \dots & d^2y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^nx & d^nx^2 & d^nx^3 & \dots & d^ny \end{vmatrix}}{1.2!3!\dots n!\,dx^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Cette formule ayant lieu quel que soit z, on peut, si l'on veut, y remplacer z par x et l'on a alors

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{n!}{1!2!\dots n!} \frac{\begin{vmatrix} dx & 0 & 0 & \dots & dy \\ d^2x & d^2x^2 & 0 & \dots & d^2y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^nx & d^nx^2 & d^nx^3 & \dots & d^ny \end{vmatrix}}{dx^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Telle est la formule que nous voulions établir : elle donne pour $n=2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

formule déjà établie dans le Calcul différentiel.

EXERCICES ET NOTES.

1. Vérifier que l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(x^2-1)-2xy\frac{dy}{dx}+y^2-1=0, \quad \text{ou} \quad y=xy'\pm\sqrt{1-y'^2}$$

a pour solution générale $y=ax\pm\sqrt{1-a^2}$; calculer la solution singulière, en partant de l'intégrale générale et directement.

2. Intégrer l'équation

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=9x^2$$

et prouver qu'elle n'a pas de solution singulière.

3. L'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$$

a pour intégrale générale

$$(3xy+2x^3+a)^2-4(y+x^2)^3=0:$$

montrer qu'elle n'a pas de solution singulière.

4. L'équation

$$xy^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^3\frac{dy}{dx}+x=0$$

a une solution singulière : la trouver.

5. Les équations

$$z\frac{dx}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2-x\left(\frac{dy}{dz}\right)^2-\left(\frac{dy}{dz}\right)^3=0,$$

$$z\frac{dy}{dz}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2-y\left(\frac{dx}{dz}\right)^2-\left(\frac{dx}{dz}\right)^3=0$$

ont pour solution générale $x=az+b$, $y=bz+a$, a et b désignant des constantes; ont-elles des solutions singulières?

6. L'équation

$$x-yy'=\frac{ab\sqrt{a^2-b^2y'}}{\sqrt{a^2y'^2+b^2}}$$

est l'équation différentielle de toutes les courbes parallèles à l'ellipse dont l'équation est

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;$$

elle n'a pas de solution singulière, mais il existe pour les courbes intégrales un lieu de points de rebroussements qui est la développée de l'ellipse.

7. L'équation

$$y - xy' - (y' - xy'')^2 + \frac{x^2 y''}{2} - y''^2 = 0$$

a pour intégrale singulière

$$(1) \qquad y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - xy'\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) - y'^2 = 0,$$

ou

$$\sqrt{16y + 4x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2} - \log\left(\sqrt{1 - x^2} - x\right) + \text{const.}$$

Cette équation (1) a elle-même une intégrale singulière

$$16y + 4x^2 - x^4 = 0$$

(COURNOT.)

8. L'équation

$$y''x(y - y'x) - y'' = 1$$

admet une intégrale singulière : la trouver directement.

9. L'équation des cercles doublement tangents à une même ellipse et ayant leurs centres sur l'axe des x est

$$x^2 - y^2 - 2x(x - yy') - A(x - yy')^2 - B = 0,$$

si l'on élimine y' entre cette équation et sa dérivée, on trouve : 1° l'ellipse enveloppe des cercles en question qui est la solution singulière ; 2° le grand axe, lieu des points où deux cercles se touchent.

10. L'équation

$$y^2 y'^2 - 2ay + y^2 = 0$$

a une solution singulière, l'élimination de y' entre cette équation et sa dérivée fournit : 1° une solution singulière ; 2° un lieu de points de rebroussements. Cette équation représente une série de cycloïdes ayant leurs rebroussements sur l'axe des x et même cercle générateur.

11. Le système

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x + y}{z - t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x - y}{z - t}, \qquad \frac{dz}{dt} = x - y + 1$$

admet pour intégrale générale

$$x - y = \text{const.}, \qquad z - t(x - y + 1) = \text{const.},$$

$$y - \log(z - t) = \text{const.},$$

et pour solution singulière $z = t$, $x = y = \text{const.}$

(CAUCHY.)

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

I. — Équations intégrables immédiatement.

Théoriquement, une équation du premier ordre peut être censée résolue par rapport à la dérivée de la fonction inconnue y, prise par rapport à la variable x; elle peut alors se présenter sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où f désigne une fonction quelconque de x et y, forme que l'on remplace le plus souvent par la suivante

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0,$$

P et Q désignant des fonctions données de x et y.

Lorsque P est fonction de x seul et Q fonction de y seul, on dit que les variables sont *séparées;* l'équation a alors visiblement pour intégrale

$$\int P\,dx + \int Q\,dy = \text{const.}$$

Un grand nombre de problèmes de Géométrie se résolvent au moyen d'équations différentielles dans lesquelles les variables sont *séparées* ou peuvent se séparer facilement. En voici quelques exemples :

Problème I. — *Trouver une courbe dans laquelle la sous-normale est constante.*

La sous-normale ayant pour expression $y\frac{dy}{dx}$ (t. II, p. 17),

en désignant par c une constante, l'équation du problème sera

$$y\frac{dy}{dx} = c, \qquad \text{ou} \qquad y\,dy - c\,dx = 0;$$

on en conclut, en intégrant,

$$\frac{y^2}{2} - cx = \text{const.}$$

ou

$$y^2 = 2cx + \text{const.}$$

équation d'une parabole. La parabole est donc la seule courbe dont la sous-normale soit constante.

Problème II. — *Trouver les courbes dans lesquelles la sous-tangente est constante et égale à c.*

La sous-tangente ayant pour expression (t. II, p. 17) $y\frac{dx}{dy}$, l'équation du problème est

$$y\frac{dx}{dy} = c$$

ou

$$\frac{dx}{c} - \frac{dy}{y} = 0;$$

les variables sont séparées et, en intégrant, on a

$$\frac{x}{c} - \log y = \log a,$$

a désignant une constante; on en tire

$$ay = e^{\frac{x}{c}};$$

cette courbe est une *logarithmique*. Une transformation de coordonnées ramène l'équation précédente à la forme

$$y = e^{\frac{x}{c}}.$$

Problème III. — *Trouver une courbe dans laquelle la*

sous-tangente est proportionnelle à une puissance donnée de l'abscisse.

L'équation du problème est

$$y\frac{dx}{dy} = \mathrm{K}x^{\alpha},$$

K et α désignant des constantes; les variables seront séparées en écrivant cette équation ainsi

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{\mathrm{K}x^{\alpha}} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\log y + \frac{1}{\mathrm{K}(\alpha - 1)x^{\alpha-1}} = \text{const.};$$

en suivant la même méthode, on trouve, sans plus de difficulté, que la courbe dont la sous-normale est proportionnelle à l'abscisse est une conique rapportée à ses axes.

II. — Du facteur d'intégrabilité.

On reconnaît souvent, à la simple inspection d'une équation de la forme

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = 0,$$

que son premier membre est une différentielle exacte $d\varphi$; il est clair alors que l'intégrale de cette équation est $\varphi = \text{const.}$

Lorsque la solution d'une équation différentielle est ainsi ramenée à la recherche d'intégrales indéfinies de différentielles à une ou plusieurs variables, on dit qu'elle est ramenée aux *quadratures*.

L'équation

$$x\,dy + y\,dx = 0,$$

par exemple, est immédiatement intégrée en observant que son premier membre est la différentielle de xy et que par suite elle donne, en l'intégrant,

$$xy = \text{const.}$$

On peut démontrer que :

Étant donnée une expression différentielle de la forme

$$P\,dx + Q\,dy,$$

dans laquelle P *et* Q *sont des fonctions quelconques de* x *et de* y, *on peut toujours trouver un facteur* μ *tel que*

$$\mu(P\,dx + Q\,dy)$$

soit une différentielle exacte.

En sorte que, quand ce facteur μ sera connu, il sera toujours facile d'intégrer l'équation

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

au moyen d'une quadrature.

Posons, en effet,

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \tag{1}$$

et soit

$$F(x, y, c) = 0, \tag{2}$$

l'intégrale générale de (1) renfermant la constante arbitraire c. L'élimination de c entre l'équation (2) et sa dérivée

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

doit donner l'équation (1); en effet, y et $\frac{dy}{dx}$ tirés de (2) et (3) doivent rendre (1) identique, c'est-à-dire doivent satisfaire à (1), quels que soient x et c; les équations (1), (2) et (3) doivent donc se réduire à deux, et (1) a lieu en même temps que (2) et (3). Or (1) ne contient pas c : donc c'est le résultat de l'élimination de c entre (2) et (3). [Nous avons déjà démontré ce théorème (p. 13) avec plus de généralité.]

Ceci posé, si l'on suppose (2) résolue par rapport à c et mise sous la forme

$$c = f(x, y),$$

on obtiendra l'équation (1) en éliminant c entre cette équation et sa dérivée; or, en prenant la dérivée, c disparaît; l'équation dérivée est donc le résultat de l'élimination de c, et l'équation

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

ou

$$(4) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

doit être identique à (1), c'est-à-dire fournir les mêmes valeurs de $\frac{dy}{dx}$ pour les mêmes valeurs de x et y; on pourra donc poser

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{P}{Q}$$

et, en appelant μ le rapport de $\frac{\partial f}{\partial x}$ à P,

$$\frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{Q}\frac{\partial f}{\partial y} = \mu;$$

on en conclut

$$\mu P = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \mu Q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

ce qui démontre l'existence du *facteur d'intégrabilité* μ.

Il est essentiel d'observer que (1) et (4) ou

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = 0$$

ne sont identiques que pour les valeurs de y satisfaisant à (3); il pourra donc se faire que certaines valeurs de y satisfassent à (1) sans satisfaire à (4). Ces valeurs sont celles qui rendent μ infini : en effet,

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right);$$

donc $P\,dx + Q\,dy$ s'annulera non seulement pour

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

mais encore pour $\frac{1}{\mu} = 0$. On voit donc que $\frac{1}{\mu} = 0$ fournira en général une solution singulière.

La recherche du facteur μ est le plus souvent un problème difficile à résoudre; si l'on exprime en effet que

$$\mu P\,dx - \mu Q\,dy$$

est une différentielle exacte, on a

$$\frac{\partial . \mu P}{\partial y} = \frac{\partial . \mu Q}{\partial x}$$

ou

$$(5) \qquad \mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Cette équation en μ est une *équation aux dérivées partielles*, et nous verrons dans un autre Chapitre que, pour la résoudre, il faut en général savoir intégrer l'équation (1).

Toutefois il y a des cas dans lesquels on peut deviner une solution de l'équation (5), et comme, évidemment, toute solution de (5) est un facteur d'intégrabilité, on pourra ramener l'intégration de (1) aux quadratures. S'il existe, par exemple, un facteur μ fonction de x seul, l'équation (5) se réduira à

$$\mu \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = Q \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ou à

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right),$$

et, μ devant être fonction de x seul, il faudra que le second membre de cette formule ne contienne que x; si cela a lieu, en le désignant par $\varphi(x)$, on aura

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \varphi(x)$$

ou, en intégrant,

$$\log\mu = \int\varphi(x)\,dx, \qquad \mu = e^{\int\varphi(x)\,dx},$$

et μ sera connu. On trouvera tout aussi facilement, quand il en existera un, un facteur d'intégrabilité fonction de y seul.

Lorsqu'il existe un facteur d'intégrabilité de la forme XY, X désignant une fonction de x seul et Y une fonction de y seul, on peut le découvrir en observant que la formule (5) devient, pour $\mu = XY$,

$$XY\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = QYX' - PXY'$$

ou

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\,\frac{X'}{X} - P\,\frac{Y'}{Y}.$$

La quantité $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, qui est nulle dans le cas où $P\,dx + Q\,dy$ est une différentielle exacte, est donc de la forme

$$Q\,f(x) - P\,F(y)$$

quand μ est de la forme XY, f désignant une fonction de x seul et F une fonction de y seul, et l'on a

$$\frac{X'}{X} = f(x), \qquad \frac{Y'}{Y} = F(y);$$

par suite,

$$\log X = \int f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \log Y = \int F(y)\,dy.$$

Remarque I. — L'équation (5) a une infinité de solutions; en d'autres termes, *il y a une infinité de facteurs d'intégrabilité*.

En effet, soit μ un facteur d'intégrabilité de $P\,dx + Q\,dy$; on aura

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = df,$$

f désignant une fonction de x et y, et, $\varphi'(f)$ désignant une fonction arbitraire de f, on aura

$$\mu\varphi'(f)(P\,dx + Q\,dy) = \varphi'(f)\,df = d\varphi(f),$$

ce qui prouve que $P\,dx + Q\,dy$, multiplié par $\mu\,\varphi'(f)$, est encore une différentielle exacte $d\varphi(f)$ et que $\mu\varphi'(f)$ est un facteur d'intégrabilité.

Remarque II. — *Tout facteur d'intégrabilité de*

$$P\,dx + Q\,dy$$

est de la forme $\mu\varphi(f)$, μ désignant l'un d'eux et f désignant la fonction qui a pour différentielle $\mu(P\,dx + Q\,dy)$, ou, plus généralement, f désignant une fonction qui, égalée à une constante, fournit une intégrale de

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

En effet, soit M un facteur d'intégrabilité : on aura

$$(1)\qquad M(P\,dx + Q\,dy) = d\psi,$$

ψ désignant une certaine fonction de x et y; on a de même

$$(2)\qquad \mu(P\,dx + Q\,dy) = df.$$

Or, si l'on pose $P\,dx + Q\,dy = 0$, on aura

$$d\psi = 0 \quad \text{et} \quad df = 0$$

et par suite

$$\psi = \text{const.}, \quad f = \text{const.}$$

Réciproquement, l'une des équations

$$\psi = \text{const.}, \quad f = \text{const.} \quad \text{ou} \quad d\psi = 0, \quad df = 0$$

entraînera l'autre; car elle entraînera

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Ainsi f et ψ sont constantes en même temps, c'est-à-dire qu'ils sont fonctions l'un de l'autre; de (1) et (2) on tire

$$\frac{M}{\mu} = \frac{d\psi}{df},$$

et, comme ψ est fonction de f, on voit que $\frac{M}{\mu}$ est fonction de f: donc $M = \mu\varphi(f)$. C. Q. F. D.

Remarque III. — *Si l'on connaît deux facteurs* μ *et* M *susceptibles de rendre*

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) \quad \text{et} \quad M(P\,dx + Q\,dy)$$

différentielles exactes, en égalant le rapport $\frac{M}{\mu}$ *à une constante, on aura l'intégrale de l'équation* $P\,dx + Q\,dy = 0$, puisque, $f = c$ étant cette intégrale, $M = f\mu$.

Nous terminerons ce qui est relatif à la théorie du facteur d'intégrabilité en faisant connaître une méthode qui permet souvent de le découvrir : cette méthode consiste à décomposer l'expression $P\,dx + Q\,dy$ en deux autres de la forme $G\,du + H\,dv$; G, H, u, v désignant des fonctions de x et y, on est alors ramené à trouver le facteur de $G\,du + H\,dv$; G^{-1} est un facteur de $G\,du$, et H^{-1} un facteur de $H\,dv$; le facteur le plus général de $G\,du$ est $\frac{f(u)}{G}$, celui de $H\,dv$ est $\frac{F(v)}{H}$; f et F désignant des fonctions quelconques, s'il est possible de déterminer des formes de f et F, telles que l'on ait identiquement

$$\frac{f(u)}{G} = \frac{F(v)}{H},$$

en appelant μ la valeur commune de ces rapports, il est clair que $\mu(G\,du + H\,dv)$ ou $\mu(P\,dx + Q\,dy)$ sera une différentielle exacte.

Pour bien faire comprendre l'esprit de cette méthode, nous l'appliquerons à l'exemple suivant :

Intégrer l'équation

$$(1) \qquad (y + x^2)\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(y\,dx - x\,dy) + (x^2\,dx + y^2\,dy) = 0;$$

il est visible que $y\,dx - x\,dy$ a pour facteur d'intégrabilité $\frac{1}{y^2}$, car

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\,\frac{x}{y};$$

son facteur d'intégrabilité le plus général sera donc $\frac{1}{y^2} f\left(\frac{x}{y}\right)$, f désignant une fonction arbitraire. De même $x^2\,dx + y^2\,dy$ a pour facteur d'intégrabilité un, et, comme

$$x^2\,dx + y^2\,dy = d\,\frac{x^3 + y^3}{3},$$

son facteur d'intégrabilité le plus général est une fonction arbitraire $F(x^3 + y^3)$ de $x^3 + y^3$. Si donc on peut disposer de f et F, de telle sorte que

$$\frac{1}{y^2} f\left(\frac{x}{y}\right) = F(x^3 + y^3) = \mu,$$

μ sera un facteur d'intégrabilité du premier membre de (1). Pour satisfaire à cette équation, il faut prendre

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = y^2\,F(x^3 + y^3);$$

$y^2 F(x^3 + y^3)$ devra donc être homogène et de degré 0; pour satisfaire à cette condition, il suffit de prendre

$$F(x^3 + y^3) = \frac{1}{(x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}} = (x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}}$$

et l'on a

$$\mu = (x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}};$$

l'intégrale de l'équation (1) est alors

$$\int \frac{(y + x^2)\,dx + (y^2 - x)\,dy}{(x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}} = \text{const.}$$

III. — Sur une méthode propre à fournir un facteur d'intégrabilité.

Considérons l'équation

$$P\,dx + Q\,dy = 0; \tag{1}$$

effectuons la substitution consistant à changer x en $x + \varepsilon X$, et y en $y + \varepsilon Y$; X et Y désignant des fonctions de x et y, et ε un infiniment petit ou, si l'on veut, une constante indépendante de x et y que nous nous proposons de faire tendre vers zéro. L'équation (1) deviendra

$$\begin{gathered}\left(P + \varepsilon X\frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon Y\frac{\partial P}{\partial y}\right)\left(dx + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}dx + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial y}dy\right)\\ + \left(Q + \varepsilon X\frac{\partial Q}{\partial x} + \varepsilon Y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\left(dy + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \varepsilon\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right) = 0\end{gathered}$$

ou, en vertu de (1),

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial P}{\partial x}X + \frac{\partial P}{\partial y}Y\right)dx + P\left(\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy\right)\\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}X + \frac{\partial Q}{\partial y}Y\right)dy + Q\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy\right) = 0.\end{gathered}$$

Supposons que l'on puisse déterminer X et Y de telle sorte que cette équation soit identique à (1); on aura, en exprimant que ces équations donnent les mêmes valeurs de $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire en remplaçant dx par Q, dy par $-P$,

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial P}{\partial x}X + \frac{\partial P}{\partial y}Y\right)Q + P\left(\frac{\partial X}{\partial x}Q - \frac{\partial X}{\partial y}P\right)\\ - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}X + \frac{\partial Q}{\partial y}Y\right)P + Q\left(\frac{\partial Y}{\partial x}Q - \frac{\partial Y}{\partial y}P\right) = 0,\end{gathered}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{P}{PX + QY} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{Q}{PX + QY} = 0;$$

cette équation montre que $\frac{1}{\mathrm{P}\mathrm{X}+\mathrm{Q}\mathrm{Y}}$ est un facteur d'intégrabilité de $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$. Donc :

Étant donnée l'équation différentielle

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = 0, \tag{1}$$

si l'on peut trouver des fonctions X, Y *telles que, en remplaçant dans cette équation* x *et* y *par* $x+\varepsilon\mathrm{X}$ *et par* $y+\varepsilon\mathrm{Y}$, *elle ne change pas de forme (abstraction faite d'un facteur), l'expression*

$$\frac{1}{\mathrm{P}\mathrm{X}+\mathrm{Q}\mathrm{Y}}$$

sera un facteur d'intégrabilité. La quantité ε *est supposée infiniment petite.*

On voit que, si P et Q sont des fonctions homogènes de même degré, la substitution de $x+\varepsilon x$ à x et de $y+\varepsilon y$ à y n'altère pas l'équation (1); $\frac{1}{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y}$ est alors un facteur d'intégrabilité (Lie, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften,* Christiania, 1874, et aussi *Göttinger Nachrichten,* 1874; *Mathematische Annalen,* t. VIII).

IV. — Méthode de Liouville.

Liouville, dans le tome XX de son Journal, 1re série, a fait une remarque qui permet souvent de trouver un facteur d'intégrabilité. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \tag{1}$$

introduisons dans la fonction f, en la généralisant, un paramètre α, ce qui est évidemment possible d'une infinité de manières, et soit

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}$$

le résultat obtenu en différentiant totalement la fonction f et en y remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par f. Si le paramètre α a été choisi de telle sorte que $f_1(x, y)$ ou même $\varphi(f)\,f_1(x, y)$ ne le contienne plus, $\varphi(f)$ désignant une fonction quelconque de f, l'intégrale de l'équation (1) pourra être représentée par

$$\int \varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}(dy - f\,dx) = \text{const.};$$

en d'autres termes, $\varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ sera un facteur d'intégrabilité de $dy - f\,dx$.

Pour démontrer ce théorème, observons que, $\varphi(f) f_1$ ne contenant plus α, on a

$$\frac{\partial \varphi(f) f_1}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\varphi(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f}\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \varphi(f)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial x} + f\,\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial y}\right) + \varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f\,\varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right] = 0;$$

il en résulte que

$$\varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dy - f\,\varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$$

est une différentielle exacte; si donc on met l'équation proposée (1) sous la forme

$$dy - f\,dx = 0,$$

on voit que $\varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ sera un facteur d'intégrabilité.

C. Q. F. D.

On voit que, pour que la méthode d'intégration précédente réussisse, il n'est nullement nécessaire que $\varphi(f)\,\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ soit indé-

pendant de α; il suffit que, pour la valeur particulière de α dont on fera usage, on ait

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\varphi(f)f] = 0$$

et que $\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ ne soit ni nul ni infini. Cette remarque est encore de Liouville.

V. — Des équations homogènes.

Lorsque P et Q sont des fonctions homogènes de même degré,

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

est une *équation homogène*. Nous donnerons deux méthodes pour intégrer cette équation :

1° On peut poser $\frac{y}{x} = z$, d'où

$$y = zx, \qquad dy = z\,dx + x\,dz;$$

on a alors

$$(P + Qz)\,dx + Qx\,dz = 0;$$

or P et Q sont à un même facteur près, que l'on peut supprimer, des fonctions de z; dans cette équation, les variables sont alors séparées et l'on a

$$\frac{dx}{x} = \frac{Q\,dz}{P + Qz},$$

d'où l'on tire

$$\log x = \int \frac{Q\,dz}{P + Qz} + \text{const.}$$

ou

$$x = e^{\int \frac{Q\,dz}{P + Qz} + \text{const.}}$$

L'intégrale est de la forme $x = c\,F(z)$ ou $x = c\,F\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$ x et y étant les coordonnées d'une courbe, $\frac{y}{x}$ est la tangente de

l'angle polaire θ; on peut donc écrire, en appelant r le rayon vecteur,

$$x = c\,\psi(\theta) \quad \text{ou} \quad r = c\,\frac{\psi(\theta)}{\cos\theta};$$

les courbes correspondant aux diverses valeurs de c sont donc homothétiques. Ainsi les équations homogènes représentent des familles de courbes homothétiques.

2° On peut observer que le facteur d'intégrabilité est, comme on l'a vu § III $(Px + Qy)^{-1}$: vérifions-le, on a

$$\frac{d}{dx}\,\frac{Q}{Px+Qy} = \frac{\frac{dQ}{dx}(Px+Qy) - PQ - Q\left(x\frac{dP}{dx} + y\frac{dQ}{dx}\right)}{(Px+Qy)^2}$$
$$= \frac{x\left(P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx}\right) - PQ}{(Px+Qy)^2},$$
$$\frac{d}{dy}\,\frac{P}{Px+Qy} = \frac{y\left(Q\frac{dP}{dy} - P\frac{dQ}{dy}\right) - PQ}{(Px+Qy)^2};$$

il en résulte

$$\frac{d}{dx}\,\frac{Q}{Px+Qy} - \frac{d}{dy}\,\frac{P}{Px+Qy}$$
$$= \frac{P\left(x\frac{dQ}{dx} + y\frac{dQ}{dy}\right) - Q\left(x\frac{dP}{dx} + y\frac{dP}{dy}\right)}{(Px+Qy)^2} = \frac{mPQ - mQP}{(Px+Qy)^2} = 0,$$

m désignant le degré de l'homogénéité de P et de Q : ainsi $Px + Qy = 0$ est en général une solution singulière.

Application. — *Trouver une courbe dans laquelle le rayon vecteur est moyenne proportionnelle entre la sous-normale et l'ordonnée.*

L'équation du problème est

$$x^2 + y^2 = y \cdot y\,\frac{dy}{dx}$$

ou

$$(x^2+y^2)\,dx - y^2\,dy = 0;$$

le facteur est

$$[(x^2+y^2)x-y^3]^{-1}.$$

En l'égalant à ∞, on a la solution singulière

$$x^3-y^3+y^2x=0;$$

elle représente trois droites. Posons $\frac{y}{x}=z$ ou $y=zx$: nous aurons

$$(x^2+z^2x^2)\,dx-x^2z^2(z\,dx+x\,dz)=0$$

ou

$$(1+z^2)\,dx-z^2(z\,dx+x\,dz)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{x}=\frac{z^2\,dz}{1+z^2-z^3};$$

on en tire

$$\log x=\mathrm{A}\log(z-\alpha)+\mathrm{B}\log(z-\beta)+\mathrm{C}\log(z-\gamma)+\text{const.},$$

A, B, C désignant $\frac{\alpha}{2-3\alpha}$, $\frac{\beta}{2-3\beta}$, $\frac{\gamma}{2-3\gamma}$ et α, β, γ les racines de $1+z^2-z^3=0$ et, par suite,

$$x=\mathrm{K}\left(\frac{y}{x}-\alpha\right)^{\mathrm{A}}\left(\frac{y}{x}-\beta\right)^{\mathrm{B}}\left(\frac{y}{x}-\gamma\right)^{\mathrm{C}},$$

K désignant une constante.

Les équations de la forme

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{F}\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right),$$

où a, b, ... sont des constantes, s'intègrent comme il suit : on pose

$$ax+by+c=\xi,$$
$$a'x+b'y+c'=\eta;$$

d'où

$$x=\frac{b(\eta-c')-b'(\xi-c)}{ab'-ba'},$$

$$y=\frac{a(\eta-c')-a'(\xi-c)}{ab'-ba'},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\,d\eta-b'\,d\xi}{a\,d\eta-a'\,d\xi};$$

l'équation proposée devient alors

$$\frac{b\,d\eta - b'\,d\xi}{a\,d\eta - a'\,d\xi} = \mathrm{F}\left(\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Cette équation en ξ et η est homogène : elle poura donc s'intégrer par les méthodes précédentes, quand on aura chassé les dénominateurs.

Toutefois, pour que la méthode que nous venons d'indiquer réussisse, il faut que l'on n'ait pas $ab' - ba' = 0$. Mais, dans ce cas, on peut poser

$$a = pa', \qquad b = pb',$$

et l'équation à intégrer est réellement de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}\left(p\,\frac{a'x + b'y + c'}{a'x + b'y + c'} + \frac{c - pc'}{a'x + b'y + c'}\right)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f(a'x + b'y);$$

alors, en posant $a'x + b'y = z$, ou

$$y = \frac{z - a'x}{b'}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b'}\,\frac{dz}{dx} - \frac{a'}{b'},$$

l'équation à intégrer devient

$$\frac{1}{b'}\,\frac{dz}{dx} = f(z) + \frac{a'}{b'}$$

ou

$$\frac{dz}{b'f(z) + a'} = dx,$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

Remarque. — Une équation de la forme

$$\mathrm{F}(x, y, dx, dy) = 0,$$

d'où l'on peut tirer, même théoriquement, $\frac{dy}{dx}$ sous la forme

d'une fonction homogène de degré zéro en x et y, doit être considérée comme une équation homogène et s'intégrera en prenant $\frac{y}{x} = z$ comme fonction inconnue à la place de y.

VI. — Équations linéaires.

On appelle équation linéaire du premier ordre toute équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q},$$

du premier degré en y et en $\frac{dy}{dx}$, dans laquelle P et Q désignent des fonctions de la variable x. Pour l'intégrer, on pose

$$(2) \qquad y = uv, \qquad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx};$$

elle devient alors

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \mathrm{P}uv = \mathrm{Q}.$$

Profitant alors de l'indétermination de u et v, on choisira v, de telle sorte que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{dv}{dx} + \mathrm{P}v = 0,$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$(4) \qquad v\frac{du}{dx} = \mathrm{Q};$$

de (3) on tire successivement

$$\frac{dv}{v} = -\mathrm{P}\,dx, \qquad \log v = -\int \mathrm{P}\,dx, \qquad v = e^{-\int \mathrm{P}\,dx};$$

et de (4) on tire

$$\frac{du}{dx} = \frac{\mathrm{Q}}{v}, \qquad u = \int \frac{\mathrm{Q}\,dx}{v} = \int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}\,dx}\,dx.$$

Portant ces valeurs dans (2), on a

$$y = e^{-\int P\,dx} \int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx;$$

en écrivant $P(x)$ au lieu de P et $Q(x)$ au lieu de Q, on peut donner à cette solution la forme suivante

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \int_{x_0}^{x} Q(z)\, e^{\int P(z)\,dz}\, dz$$

ou

$$(5) \qquad y = \int_{x_0}^{x} Q(z)\, e^{\int P(z)\,dz - \int P(x)\,dx}\, dz.$$

x_0 est alors la constante arbitraire d'intégration; quant aux constantes contenues dans les intégrales

$$\int P(z)\,dz \quad \text{et} \quad \int P(x)\,dx,$$

elles se détruisent. On peut d'ailleurs écrire la formule (5) ainsi

$$y = \int_{x_0}^{x} Q(z)\, e^{\int_x^z P(\mu)\,d\mu}\, dz.$$

On peut encore intégrer l'équation linéaire au moyen d'un facteur; en effet, cette équation peut s'écrire

$$dy + (Py - Q)\,dx = 0.$$

Soit μ un facteur d'intégrabilité : on devra avoir

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y}(Py - Q) + \mu P;$$

or on satisfait à cette équation en prenant μ fonction de x seul, car elle se réduit alors à

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu P \qquad \text{ou à} \qquad \frac{d\mu}{dx} = \mu P$$

ou à

$$\frac{d\mu}{\mu} = P\,dx,$$

d'où l'on tire

$$\log \mu = \int P\,dx \qquad \text{et} \qquad \mu = e^{\int P\,dx}.$$

$e^{\int P\,dx}$ étant un facteur d'intégrabilité,

$$\int [e^{\int P\,dx}\,dy + (Py - Q)e^{\int P\,dx}\,dx] = \text{const.}$$

est l'intégrale cherchée; cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$y\,e^{\int P\,dx} - \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx = \text{const.}$$

ou

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + \text{const.}\right),$$

ainsi qu'on l'a trouvé tout à l'heure. Cette méthode est peut-être plus naturelle que la précédente.

VII. — Équation de Bernoulli.

L'équation suivante, dite *de Bernoulli,* se ramène à une équation linéaire,

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n.$$

En divisant par y^n, on a

$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q;$$

posant alors

$$\frac{y^{-n+1}}{-n+1} = z,$$

il vient

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)z = Q,$$

ce qui est l'équation linéaire.

Exemple. — *Trouver une courbe dont le rayon vecteur*

soit moyenne proportionnelle entre l'abscisse et la sous-normale.

L'équation du problème est

$$xy\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{x}{y};$$

c'est une équation de Bernoulli ; elle peut s'écrire

$$y\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x} = x$$

et, posant $\frac{y^2}{2} = z$, on a

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = x,$$

d'où

$$z = e^{-2\int\frac{dx}{x}}\int xe^{2\int\frac{dx}{x}}\,dx$$

$$= e^{\log\frac{1}{x^2}}\int xe^{\log x^2}\,dx = \frac{1}{x^2}\int x^3\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{c}{x^2}$$

et

$$y = \sqrt{2z} = \sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{2c}{x^2}}.$$

VIII. — Sur une équation plus générale que celle de Bernoulli et son application à la théorie des développées.

L'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + Py + Qy^2 = R,$$

où P, Q, R sont des fonctions de x seul, s'intègre quand on en connaît une solution y_1 ; en effet, alors on a

$$(2) \qquad \frac{dy_1}{dx} + Py_1 + Qy_1^2 = R;$$

retranchons (2) de (1) et posons $y - y_1 = z$, nous aurons

$$(3) \qquad \frac{dz}{dx} + (P + 2Qy_1)z + Qz^2 = 0,$$

ce qui est une équation de Bernoulli, réductible à la forme linéaire, en prenant pour fonction inconnue $\frac{1}{z}$, et l'on a

$$\frac{1}{z} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y - y_1} = e^{\int (P+2Qy_1)dx} \int Q e^{-\int (P+2Qy_1)dx} dx.$$

On rencontre l'équation que nous venons d'intégrer dans diverses circonstances et, en particulier, quand on cherche les développées des courbes gauches. Soient

$$(4) \qquad x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

les équations de la tangente à une courbe gauche : un plan tangent pourra être représenté par

$$(5) \qquad (x - az - \alpha) + \lambda(y - bz - \beta) = 0.$$

Ce plan en se déplaçant engendre une développable dont la génératrice aura pour équations (5) et sa différentielle

$$(6) \qquad -z\,da - d\alpha + d\lambda(y - bz - \beta) - \lambda(z\,db + d\beta) = 0;$$

les équations d'une parallèle à cette génératrice sont

$$\frac{z}{d\lambda} = \frac{y}{da + b\,d\lambda + \lambda\,db} = \frac{x}{a\,d\lambda - \lambda\,da - \lambda^2\,db}.$$

Si nous exprimons que la génératrice (5), (6) est normale à la tangente, l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan (6) sera une développée, et nous aurons

$$a(a\,d\lambda - \lambda\,da - \lambda^2\,db) + b(da + b\,d\lambda + \lambda\,db) + d\lambda = 0$$

ou bien

$$(7) \qquad d\lambda(a^2 + b^2 + 1) + \lambda(b\,db - a\,da) - \lambda^2 a\,db = -b\,da;$$

c'est une équation du genre de celles que nous avons appris

à intégrer. On en connaît toujours une solution : en effet, considérons le plan tangent

$$x - az - \alpha + \lambda(y - bz - \beta) = 0;$$

exprimons qu'il est perpendiculaire à sa propre direction : nous aurons

$$(8) \qquad 1 + \lambda^2 + (a + b\lambda)^2 = 0.$$

Il est facile de voir qu'il est aussi perpendiculaire à sa direction infiniment voisine ; en effet, quand on a

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

on a encore

$$A(A + dA) + B(B + dB) - C(C + dC) = 0,$$

car cette formule se réduit à $A\,dA + B\,dB + C\,dC = 0$.

Ainsi, en déterminant λ au moyen de l'équation (8), le plan tangent à la courbe considérée enveloppera une développable dont la génératrice sera contenue dans deux plans normaux au plan enveloppant ; elle sera donc normale au plan enveloppant, c'est-à-dire normale à elle-même et aussi à la courbe proposée ; l'arête de rebroussement de la développable considérée sera donc une développée, et λ tiré de (8) sera une solution de (7).

On tire de (8)

$$\lambda = \frac{-ab \pm \sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{-1}}{1 + b^2};$$

si l'on pose alors dans (7)

$$\lambda = \frac{-ab \pm \sqrt{-1}\sqrt{a^2 - b^2 - 1}}{1 + b^2} + \frac{1}{\gamma},$$

on obtiendra une équation linéaire pour déterminer γ, et le problème se résoudra par les quadratures, comme on le savait d'ailleurs (T. II, p. 381 et suivantes).

Cette solution a été donnée par M. O. Bonnet.

Nous rencontrerons une autre application importante de la théorie que nous venons d'exposer dans la recherche des lignes asymptotiques des surfaces gauches.

IX. — Des équations que l'on intègre en les différentiant.

Un grand nombre d'équations s'intègrent en les différentiant; nous allons les passer successivement en revue :

1° L'équation

$$x = f(y'), \tag{1}$$

dans laquelle y' désigne la dérivée $\frac{dy}{dx}$, devient, en la différentiant,

$$dx = f'(y')\,dy'$$

ou, en multipliant par y',

$$dy = f'(y')\,y'\,dy'.$$

En intégrant, on a

$$y = \int f'(y')y'\,dy' + \text{const.}; \tag{2}$$

l'élimination de y' entre cette équation et (1) donne y en fonction de x; on peut donc dire que l'ensemble des équations (1) et (2) représente l'intégrale générale de (1).

2° L'équation

$$y = f(y') \tag{3}$$

s'intègre d'une manière analogue. En la différentiant, on a

$$dy = f'(y')\,dy'$$

ou

$$y'\,dx = f'(y')\,dy',$$

d'où l'on tire

$$dx = f'(y')\,\frac{dy'}{y'}$$

et, en intégrant,

$$(4) \qquad x = \int \frac{f'(y')}{y'} dy' + \text{const.};$$

l'élimination de y' entre (3) et (4) donne une relation entre x et y contenant une constante : c'est l'intégrale générale de (3).

Appliquons ces considérations à quelques exemples :

1° *Trouver une courbe dont la normale soit constante et égale à a.*

L'équation du problème est

$$(A) \qquad y\sqrt{1+y'^2} = a$$

ou

$$y = \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}};$$

en différentiant, on a

$$dy = -\frac{ay'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ou, remplaçant dy par $y'\,dx$,

$$dx = -a\,dy'(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

et, en intégrant,

$$x = a\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + c,$$

c désignant une constante. L'élimination de y' entre cette équation et la proposée donne

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2.$$

C'est la solution générale : en éliminant c entre cette équation et sa dérivée par rapport à c

$$x - c = 0,$$

on a une solution singulière

$$y = \pm a.$$

La solution générale représente un cercle ayant pour rayon

a et son centre placé sur l'axe des x; la solution singulière (p. 24) se compose des deux droites qui constituent l'enveloppe de ces cercles.

Il est clair que le problème que nous venons de traiter aurait pu se résoudre en tirant y' de l'équation (A), ce qui aurait donné

$$y' = \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx,$$

ce qui donne sur-le-champ

$$\sqrt{a^2 - y^2} = x + c.$$

2° *Intégrer l'équation*

$$(B) \qquad x = e^{y'} + y'.$$

En différentiant, on a

$$dx = e^{y'}\,dy' + dy'$$

et, en multipliant par y',

$$dy = y'(e^{y'} + 1)\,dy',$$

par suite

$$(C) \qquad y = \int y'(e^{y'} + 1)\,dy' + \text{const}.$$

L'élimination de y' entre (C) et (B) donnerait l'intégrale de (B); mais on peut se dispenser de faire cette élimination, et dire que (B) et (C) prises simultanément représentent l'intégrale de l'équation (B).

Lorsqu'une équation différentielle du premier ordre ne contient pas l'une des variables x, y, bien qu'on ne puisse pas la résoudre par rapport à $y' = \frac{dy}{dx}$, il peut arriver qu'on puisse l'intégrer, soit en termes finis, soit au moyen de fonc-

tions elliptiques; si, par exemple, y n'entre pas dans l'équation, on peut la supposer mise sous la forme

$$y' = \varphi(x),$$

d'où l'on tire

$$y = \int \varphi(x)\,dx.$$

Si alors x et $\varphi(x)$ ou y' sont calculables en fonction d'un même paramètre, soit rationnellement, soit en faisant intervenir rationnellement un radical carré recouvrant un polynôme du quatrième degré, y sera exprimable en termes finis, ou au moyen des fonctions elliptiques. C'est ce qui arrivera si l'équation donnée représente une courbe de genre zéro ou un, en y considérant x comme une abscisse et y' comme une ordonnée.

Le cas où cette courbe est de genre zéro ne présente pas de difficulté : supposons-la de genre un, on exprimera x et y' en fonction rationnelle d'un paramètre t et d'un radical, tel que $\sqrt{A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4}$, et par une transformation convenable on ramènera ce radical à la forme $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$; x et y' seront alors fonctions rationnelles de u et de ce radical. On fera alors $u = \operatorname{sn}\varphi$, et x, ainsi que y', deviendront fonctions rationnelles de $\operatorname{sn}\varphi$, $\operatorname{cn}\varphi$, $\operatorname{dn}\varphi$; l'expression $y'\,dx$ se ramènera à la forme

$$F(\operatorname{sn}\varphi, \operatorname{cn}\varphi, \operatorname{dn}\varphi)\,d\varphi,$$

F désignant une fonction rationnelle, et pourra être intégrée par les procédés connus; x et y seront alors exprimés au moyen du paramètre φ, et il n'entrera, si l'on veut, dans leur expression, que la transcendante Θ et des logarithmes.

Si la courbe représentée par l'équation qui lie x à y' était de genre deux, on pourrait encore exprimer x et y' et par suite x et y au moyen d'un même paramètre, explicitement, au moyen des fonctions hyperelliptiques; mais, si le genre de la courbe en question était supérieur à deux, il ne faudrait plus songer à obtenir un résultat explicite.

Par exemple, une équation du troisième degré en x et y'

ou en y et y' s'intégrera toujours au moyen des fonctions elliptiques; une équation du quatrième degré également lorsque x et y' n'y entreront ni l'un ni l'autre au degré zéro ou un, etc.

X. — Équation de Clairaut.

L'équation

$$(1) \qquad y = y'x + f(y'),$$

dans laquelle $f(y')$ est une fonction quelconque de la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$, est connue sous le nom d'équation de Clairaut; on peut considérer cette équation comme celle de la tangente à une certaine courbe C, exprimée au moyen de son coefficient angulaire y'. On prévoit alors que, la courbe en question devant être l'enveloppe de ses tangentes, son équation s'obtiendra en éliminant y' entre l'équation (1) et sa dérivée prise par rapport à y'. Le résultat que l'on obtient ainsi est évidemment une solution de l'équation (1), mais on voit moins bien quelle doit être la solution la plus générale : cette solution générale s'obtient en remplaçant y' par une constante arbitraire dans l'équation (1) elle-même. C'est ce que nous allons trouver par un calcul direct.

Pour intégrer l'équation (1), différentions-la; nous aurons

$$y' = y' + x\frac{dy'}{dx} + f'(y')\frac{dy'}{dx}$$

ou bien

$$[x + f'(y')]\frac{dy'}{dx} = 0,$$

équation qui se décompose en

$$x + f'(y') = 0 \qquad \text{et} \ \frac{dy'}{dx} = 0 \qquad \text{ou} \qquad y' = \text{const.} = a.$$

On obtiendra la solution de (1), en éliminant y' entre l'une de ces équations et (1), ce qui donne les deux solutions suivantes : 1°

$$y = ax + f(a),$$

et 2° la résultante des équations

$$(2)\qquad \begin{cases} x + f'(y') = 0, \\ y = y'x + f(y'). \end{cases}\qquad (3)$$

La première solution est l'intégrale générale de (1) : c'est l'équation d'une tangente à la courbe C; la seconde solution est singulière, elle peut être représentée par les équations

$$y = ax + f(a), \qquad 0 = x + f'(a)$$

et sous cette forme on voit qu'elle représente l'enveloppe de la droite $y = ax + f(a)$, c'est-à-dire la courbe elle-même.

Ainsi l'intégrale de l'équation de Clairaut s'obtient en remplaçant la dérivée de la fonction inconnue par une constante, et la solution singulière en éliminant la constante entre l'intégrale générale et sa dérivée relative à la constante.

Le problème qui a pour but de trouver une courbe connaissant sa podaire dépend d'une équation de Clairaut.

Pour trouver la podaire d'une courbe, en prenant l'origine pour pôle, désignons par x, y les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe : l'équation de la tangente en ce point sera

$$Y - y = y'(X - x);$$

la perpendiculaire menée par l'origine aura pour équation

$$Y = -\frac{X}{y'}.$$

L'élimination de x, y et y' entre ces deux équations et celle de la courbe et de sa dérivée donnerait la podaire; mais, en supposant la podaire connue, l'élimination des coordonnées X, Y entre les équations précédentes et celle de la podaire donne l'équation différentielle de la courbe; soit $F(X, Y) = 0$ l'équation de la podaire; celle de la courbe sera donc

$$F\left[-(y - y'x)\frac{y'}{1 + y'^2}, (y - y'x)\frac{1}{1 + y'^2}\right] = 0.$$

Cette équation résolue par rapport à $y - y'x$, donne un résultat de la forme

$$y = y'x + \varphi(y'),$$

c'est-à-dire une équation de Clairaut.

La courbe cherchée est représentée par la solution singulière de cette équation; l'intégrale générale de cette équation représente l'ensemble des tangentes à la courbe cherchée.

Proposons-nous, par exemple, de *trouver la courbe dont la podaire est une ligne droite*

$$Y = c.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée s'obtiendra en éliminant X entre les équations

$$c - y = y'(X - x),$$

$$X + cy' = 0,$$

ce qui donne

$$y = y'x + (1 + y'^2)c:$$

c'est une équation de Clairaut. L'intégrale générale s'obtient en remplaçant y' par une constante m, ce qui donne

$$y = mx + (1 + m^2)c;$$

l'intégrale singulière, qui est ici la solution intéressante, s'obtient en éliminant m entre cette équation et sa dérivée relative à m :

$$0 = x + 2cm,$$

ce qui donne

$$y = -\frac{x^2}{2c} + \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)c.$$

Ainsi la courbe qui a pour podaire une droite est une parabole, résultat connu.

La recherche d'une courbe parallèle à une courbe donnée présente de l'analogie avec ce dernier problème; soit en effet

$\frac{dy}{dx} = y'$: l'équation de la tangente à une courbe en fonction de son coefficient angulaire est

$$y = y'x + \varphi(y'):$$

c'est une équation de Clairaut; l'équation d'une parallèle à cette tangente située à la distance l de cette tangente est

$$(1) \qquad y = y'x + \varphi(y') \pm l\sqrt{1+y'^2}:$$

cette équation est encore une équation de Clairaut; son intégrale générale est l'équation d'une tangente à la parallèle à la courbe donnée, son intégrale singulière sera l'équation de l'enveloppe de la tangente (1) dans laquelle y' sera regardée comme une constante : cette enveloppe est la courbe parallèle cherchée.

Ainsi, pour trouver l'équation d'une parallèle à une courbe, il suffira de chercher l'enveloppe d'une parallèle à la tangente. L'équation tangentielle de la parallèle s'obtient facilement en éliminant y' entre les équations suivantes, qui font connaître les coordonnées tangentielles ξ, η d'une tangente quelconque :

$$\xi = \frac{-y'}{\varphi(y') \pm l\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\eta = \frac{1}{\varphi(y') \pm l\sqrt{1+y'^2}}.$$

XI. — Équation de Lagrange.

L'équation connue sous le nom d'équation de Lagrange est la suivante

$$(1) \qquad y = xf(y') + F(y');$$

c'est, comme l'on voit, une équation du premier degré en x et y contenant la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ d'une façon quelconque. En la différentiant, on a

$$dy = dx\,f(y') + xf'(y')\,dy' + F'(y')\,dy';$$

en remplaçant dy par $y'dx$, elle devient

$$[f(y') - y']\frac{dx}{dy'} + xf'(y') + F'(y') = 0;$$

cette équation, linéaire par rapport à x, pourra être intégrée au moyen de quadratures et, en éliminant y' entre son intégrale et (1), on aura l'intégrale générale de l'équation (1).

Plus généralement, supposons qu'une équation différentielle puisse être résolue par rapport à l'une des variables y, et mise sous la forme

$$y = F(x, y');$$

la différentiation donnera

$$y'dx = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y'}dy';$$

si l'on peut intégrer cette équation en x et y', dans laquelle dx et dy' n'entrent que sous forme linéaire, l'élimination de y' entre l'intégrale générale de cette équation et $y = F(x, y')$ donnera l'intégrale générale de l'équation proposée.

XII. — Généralisation des théories précédentes.

Quand une équation différentielle est rebelle à toutes les méthodes exposées jusqu'à présent, on peut essayer de l'intégrer en la différentiant. En combinant alors l'équation proposée avec celle que l'on a obtenue par la différentiation, il peut arriver que l'on parvienne à former une équation intégrable; l'élimination de y' entre le résultat de l'intégration et l'équation proposée donne alors l'intégrale générale de cette équation.

Le succès de la méthode que nous venons d'indiquer ne doit jamais être considéré comme assuré; il dépend beaucoup de la sagacité du calculateur, et nous en ferons bien connaître l'esprit en l'appliquant à quelques exemples.

1° *Trouver une courbe dont la normale partage en*

deux parties égales l'angle des rayons vecteurs issus de deux points fixes.

L'équation différentielle du problème est, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$ et en appelant $2c$ la distance des points fixes,

$$(1) \qquad y'^2 xy - y'(y^2 - x^2 - c^2) - xy = 0;$$

en différentiant cette équation par rapport à x, on a

$$(2) \qquad y''(2yy'x - y^2 + x^2 + c^2) + y'^3 x - yy'^2 + xy' - y = 0;$$

en éliminant $y^2 - x^2 - c^2$ entre (1) et (2), on trouve

$$y''(y'^2 + 1)xy + y'^4 x - yy'^3 + y'^2 x - yy' = 0$$

et, en divisant par $1 + y'^2$,

$$y'' xy + xy'^2 - yy' = 0.$$

Divisant par xyy', on a

$$\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0$$

ou bien

$$\log y' + \log y - \log x = \log \text{const.} = \log k,$$

d'où

$$yy' = kx = -\frac{b^2}{a^2} x;$$

en éliminant y' entre cette équation et la proposée, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en supposant bien entendu $c^2 = a^2 - b^2$, ainsi qu'on devait s'y attendre.

2° *Un chien court après son maître d'un mouvement uniforme, le maître parcourt aussi d'un mouvement uniforme une ligne droite, la vitesse du chien rencontre constamment le maître, ou, si l'on veut, la tangente à la courbe que décrit le chien rencontre sans cesse le maître, quelle est la courbe décrite par le chien?*

Prenons la trajectoire du maître pour axe des y et une perpendiculaire à cette droite pour axe des x.

Au bout du temps t, l'ordonnée du maître pourra être représentée par at, la tangente à la courbe décrite par le chien est représentée par l'équation

$$Y - y = (X - x)\frac{dy}{dx},$$

et, comme elle passe par le maître, on a

(1) $$at - y = -x\frac{dy}{dx};$$

mais, en appelant b la vitesse du chien, on a

$$ds = b\,dt \qquad \text{ou} \qquad s = bt,$$

s désignant l'arc du chemin parcouru par le chien ; on tire de là t, et, en le portant dans (1), on a

$$\frac{as}{b} - y = -x\frac{dy}{dx}.$$

Pour intégrer cette équation, il faut d'abord la différentier, ce qui donne

$$\frac{a}{b}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -x\frac{d^2y}{dx^2}$$

ou bien, en posant $\frac{dy}{dx} = y'$,

$$\frac{a}{b}(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = -x\frac{dy'}{dx}$$

ou

$$-\frac{a}{b}\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

en intégrant, on a

$$-\frac{a}{b}\log x + \log c = \log\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right),$$

c désignant une constante. Nous ferons $-\frac{a}{b} = \mu$; nous aurons alors

$$y' = \frac{cx^{\mu} + c^{-1}x^{-\mu}}{2},$$

$$y = \frac{c}{2(\mu + 1)}x^{\mu+1} + \frac{c^{-1}}{2(1 - \mu)}x^{1-\mu} + \text{const.}$$

La courbe en question porte le nom de *courbe de poursuite.*

En général, quand, dans un problème de Géométrie, l'arc entre comme donnée, la recherche de cette courbe dépend d'une équation qu'il convient de différentier. Voici un exemple :

3° *Trouver une courbe dont l'arc soit une fonction de l'ordonnée.*

En appelant s l'arc, x, y les coordonnées d'un point de la courbe, on a

$$s = \varphi(y)$$

et, en différentiant,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \varphi'(y)\,\frac{dy}{dx};$$

on en conclut

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = [\varphi'(y)]^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

et

$$dx = dy\sqrt{[\varphi'(y)]^2 - 1},$$

lorsque φ'^2 sera de la forme

$$\varphi'^2 = \frac{ay^2 + by + c}{(my + n)^2},$$

a, b, c, m, n désignant des constantes, ou

$$\varphi' = \frac{\sqrt{ay^2 + by + c}}{my + n}.$$

On pourra obtenir x sous forme finie en fonction de y; nous examinerons les cas suivants :

$$1^\circ\ \ \varphi = a, \qquad \varphi' = 0,$$

$$2^\circ\ \ \varphi = ay, \qquad \varphi' = a,$$

$$3^\circ\ \ \varphi = a\log y, \qquad \varphi' = \frac{a}{y},$$

$$4^\circ\ \ \varphi = 2a\sqrt{y}, \qquad \varphi' = \frac{a}{\sqrt{y}},$$

1° $\varphi = a$ donne $x = y\sqrt{-1} + c$: ainsi *les courbes dont l'arc est de longueur constante sont les droites isotropes.*

2° $\varphi = ay$ donne $x = y\sqrt{a^2 - 1} + \text{const.}$: ainsi *les lignes droites sont les seules lignes dont l'arc soit proportionnel à l'ordonnée.*

3° Prenons $\varphi = a \log y$, nous aurons

$$x = \int \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\, dy = \int \frac{1}{y}\sqrt{a^2 - y^2}\, dy.$$

Nous poserons $y = a\cos u$; nous aurons alors

$$\pm x = \int \frac{a \sin^2 u\, du}{\cos u} = \int \frac{a\, du}{\cos u} - \int a\, du \cos u$$

ou

$$\pm x = a \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}\right) - a \sin u.$$

4° Prenons $\varphi = 2a\sqrt{y}$; nous aurons

$$x = \int \sqrt{\frac{a^2}{y} - 1}\, dy$$

ou bien

$$x = \int \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}}\, dy = \int \frac{a^2 - y}{\sqrt{a^2 y - y^2}}\, dy.$$

Nous transformerons les coordonnées et nous poserons

$$a^2 = 2r, \qquad y = y_1 + r;$$

nous aurons alors

$$x = \int \frac{(r - y_1)\, dy_1}{\sqrt{r^2 - y_1^2}}$$

et, par suite, en changeant y_1 en y,

$$x = r \arcsin \frac{y}{r} + \sqrt{r^2 - y^2} + \text{const.}$$

En posant

$$y = r \sin \varphi,$$

cette formule donne

$$x = r\varphi + r\cos\varphi;$$

on reconnaît les équations de la cycloïde, et mieux, en remplaçant φ par $\frac{\pi}{2}+\varphi$, y par $r-y$, et x par $\frac{\pi}{2}+x$,

$$y = r(1-\cos\varphi),$$
$$x = r(\varphi-\sin\varphi).$$

XIII. — Équation de Jacobi.

Jacobi a donné le moyen d'intégrer les équations de la forme

$$L\,dx + M\,dy + N(y\,dx - x\,dy) = 0,$$

où L, M, N désignent des fonctions linéaires de x et y. Nous généraliserons cette équation, et nous la présenterons sous une forme un peu différente. Nous introduirons une variable z, afin de rendre les formules homogènes, et nous supposerons cette variable égale à 1, après avoir effectué les différentiations indiquées. Nous remplacerons ainsi y et x par $\frac{y}{z}$ et $\frac{x}{z}$, dy sera remplacé par $d\frac{y}{z}$ ou par $\frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$, dx par $\frac{z\,dx - x\,dz}{z^2}$; de sorte que l'équation proposée prendra la forme

$$(1)\quad L(z\,dy - y\,dz) + M(x\,dz - z\,dx) + N(y\,dx - x\,dy) = 0.$$

Quand on fait $z=1$, cette équation se réduit à la proposée, à cela près que L y est remplacé par $-$M et M par L. Nous nous occuperons spécialement de l'équation (1) et nous supposerons d'abord que L, M, N sont des fonctions entières homogènes de degré quelconque m.

Les fonctions L, M, N sont homogènes, et, tout en leur conservant leur homogénéité, on n'altère pas l'équation en les remplaçant par $L+\Lambda x$, $M+\Lambda y$, $N+\Lambda z$, Λ désignant une fonction homogène de degré moins élevé d'une unité que L, M et N.

Pour la commodité du langage, nous considérerons x, y, z,

comme représentant les coordonnées homogènes d'un point. Nous pouvons écrire l'équation (1)

$$(Mz - Ny)\,dx + (Nx - Lz)\,dy + (Ly - Mx)\,dz = 0,$$

et l'on voit que les points pour lesquels on a

$$(2) \qquad Mz - Ny = 0, \qquad Nx - Lz = 0, \qquad Ly - Mx = 0,$$

ou

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z},$$

sont des points où les rapports $dx : dy : dz$ seront indéterminés : on donne à ces points le nom de *points singuliers;* la tangente de la courbe intégrale y est indéterminée.

L, M, N étant entiers et de degré m, *il ne saurait y avoir plus de* $m+1$ *points singuliers en ligne droite.*

Sans quoi deux des courbes (2) auraient plus de $m+1$ points en ligne droite, ce qui est absurde, puisqu'elles sont de degrés $m+1$.

Si $m+1$ *points singuliers sont en ligne droite, l'équation de la droite qui les contient est une intégrale de l'équation* (1).

En effet, prenons cette droite pour axe des x; en faisant $x=0$ dans (2), on doit avoir $m+1$ solutions; donc

$$Lz = 0, \qquad Ly = 0$$

doivent avoir $m+1$ solutions quand on y suppose $x=0$; donc L est un polynôme de degré m possédant $m+1$ racines, ce qui est absurde, à moins qu'il ne soit identiquement nul pour $x=0$, ce qui exige que L contienne x en facteur; mais alors l'équation (1) est satisfaite pour $x=0$: donc l'équation de la droite en question est bien une intégrale de l'équation.

Lorsque les polynômes L, M, N *sont du premier degré, et c'est le cas examiné par Jacobi,* $m+1=2$ *et les droites passant par deux des points singuliers sont des solutions.*

Les équations (2), dans le cas où L, M, N sont du premier degré, ont trois solutions finies. Prenons les droites qui joignent les trois points singuliers correspondants pour axes de référence; l'équation (1) devra être satisfaite pour $x=0$, ce qui exige que L contienne x en facteur; de même M doit contenir y, et N doit contenir z : donc on doit supposer $L = ax$, $M = by$, $N = cz$, a, b, c désignant des constantes, et l'équation devient

$$(b-c)yz\,dx + (c-a)zx\,dy + (a-b)xy\,dz = 0$$

ou

$$\frac{b-c}{x}dx + \frac{c-a}{y}dy + \frac{a-b}{z}dz = 0,$$

d'où l'on tire

$$x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b} = \text{const.}$$

Telle est l'intégrale de l'équation de Jacobi : il faudra, bien entendu, y remplacer x, y, z par leurs valeurs en fonction des variables primitives.

Encore un mot avant d'abandonner ce sujet.

Pour que $f(x, y, z) = 0$ soit une solution de (1), f désignant une fonction homogène, il faut que l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

fournisse pour les rapports $dy : dx : dz$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$ des valeurs satisfaisant à (1). Mais on peut présenter cette condition sous un autre aspect : on a, en effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (y\,dz - z\,dy) = \frac{\partial f}{\partial y} : (z\,dx - x\,dy) = \frac{\partial f}{\partial z} : (x\,dy - y\,dx).$$

Si l'on remplace alors $y\,dz - z\,dy$, ... par $\frac{df}{dx}$ $\cdots$ dans (1), on a

$$(4) \qquad L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

et cette équation a lieu quand (1) et $f = 0$ ont lieu en même temps; si donc $f = 0$ est une intégrale de (1), l'équation (4) sera une conséquence de $f = 0$, et, par suite, on aura identiquement

$$L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha f,$$

α désignant un polynôme de degré $m - 1$. Réciproquement, si cette formule a lieu identiquement, $f = 0$ sera une intégrale de (1). On pourra donc découvrir des solutions de (1) en remplaçant f par un polynôme à coefficients indéterminés et homogène et α par un polynôme de degré $m - 1$.

Quand on connaît un certain nombre de solutions particulières de l'équation (1), *on peut en déduire la solution générale.*

En effet, si l'on connaissait une solution de l'équation

$$(4) \qquad L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

homogène de degré zéro, en l'égalant à une constante, on aurait l'intégrale générale de (1). En effet, si l'équation (4) et la suivante ont lieu

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (Mz - Ny) = \frac{\partial f}{\partial y} : (Nx - Lz) = \frac{\partial f}{\partial z} : (Ly - Mx),$$

et par suite, en comparant avec (1),

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f = \text{const.}$$

Cela posé, on a identiquement, en appelant φ une fonction

de $u, v, w, \ldots$.

$$(5)\quad L\frac{\partial\varphi}{\partial x}+M\frac{\partial\varphi}{\partial y}+N\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+N\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(L\frac{\partial v}{\partial x}+N\frac{\partial v}{\partial y}+N\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\ldots.$$

Supposons que $u, v, \ldots$ soient des solutions particulières de (1), en sorte que

$$L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+N\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha u,\qquad L\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots=\beta v,\qquad \ldots$$

en appelant $a, b, c, \ldots$ des exposants convenables et en posant $\varphi(u, v, \ldots)=u^a v^b\ldots$, la formule (5) donnera

$$L\frac{\partial\varphi}{\partial x}+M\frac{\partial\varphi}{\partial y}+N\frac{\partial\varphi}{\partial z}=au^{a-1}\alpha u v^b\ldots+bv^{b-1}u^a\beta v\ldots=\varphi(a\alpha+b\beta+\ldots).$$

Si donc on peut prendre $a\alpha+b\beta+\ldots=0$, et, en appelant les degrés de $u, v, \ldots, \mu, \nu, \ldots$, si l'on peut prendre $a\mu+b\nu+\ldots=0$, la fonction φ sera homogène de degré zéro et satisfera à l'équation (4); en l'égalant à une constante on aura la solution générale de l'équation (1).

XIV. — Caractéristiques de M. Fouret.

Considérons l'équation différentielle

$$(1)\qquad f(x, y, y')=0,$$

où $y'=\frac{dy}{dx}$. Cette équation définit une famille de courbes, et l'on appelle *caractéristiques* de cette famille le nombre μ de courbes pouvant passer par un point donné M, et le nombre ν de ces courbes qui touchent une droite donnée.

Nous supposerons l'équation (1) algébrique : alors le degré de cette équation par rapport à y' indiquera le nombre μ de branches de courbe passant par le point (x, y). Si l'on suppose y' constant dans la formule (1), cette équation représentera

le lieu des points pour lesquels les courbes de la famille qui constitue l'intégrale générale touchent une droite parallèle à une direction donnée y'.

Si l'on pose $y = y'x + c$, l'équation

$$f(x, y'x + c, y') = 0$$

fera connaître le nombre ν des points où la droite $y = y'x + c$ touche les courbes intégrales : ce nombre est le degré de f par rapport à x et y.

Application. — L'équation générale des coniques passant par quatre points est, en appelant s et s' deux polynômes du second degré en x et y,

$$s + cs' = 0.$$

L'équation différentielle de ces coniques s'obtient en éliminant c entre

$$\frac{\partial s}{\partial x}\,dx + \frac{\partial s}{\partial y}\,dy + c\left(\frac{\partial s'}{\partial x}\,dx + \frac{\partial s'}{\partial y}\,dy\right) = 0$$

et $s + cs' = 0$; cette équation est donc

$$\frac{1}{s}\left(\frac{\partial s}{\partial x} + y'\,\frac{\partial s}{\partial y}\right) - \frac{1}{s'}\left(\frac{\partial s'}{\partial x} + \frac{\partial s'}{\partial y}\,y'\right) = 0,$$

et le lieu des points de contact de ces coniques avec une droite parallèle à $y = y'x$ est donné par l'équation précédente ou

$$\frac{1}{s}\,\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{s'}\,\frac{\partial s'}{\partial x} + y'\left(\frac{1}{s}\,\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{1}{s'}\,\frac{\partial s'}{\partial y}\right) = 0.$$

Ce lieu est une courbe du troisième degré qui passe par les intersections des coniques données et par le point de concours des diagonales du quadrilatère inscrit à ces coniques.

Il est facile d'écrire l'équation générale des coniques inscrites dans un quadrilatère : en effet, soient X, Y, Z des fonctions linéaires (premiers membres des équations des dia-

gonales du quadrilatère circonscrit); on a, pour l'équation des coniques en question,

$$(A) \qquad c^2X^2 - c(X^2 + Y^2 - Z^2) + Y^2 = 0.$$

En effet, cherchons l'enveloppe de ces coniques : il faut éliminer c entre cette équation et

$$2cX^2 - (X^2 + Y^2 - Z^2) = 0,$$

ce qui donne l'équation des côtés du quadrilatère :

$$(X + Y + Z)(-X + Y + Z)(X - Y + Z)(X + Y - Z) = 0.$$

Cherchons l'équation différentielle : il faudra éliminer c entre (A) et sa dérivée

$$c^2X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + y'\frac{\partial X}{\partial y}\right) - \ldots = 0,$$

et l'on obtiendra une équation du sixième degré lieu des points de contact avec une parallèle à $y = y'x$.

Mais revenons au cas général ; cherchons à résoudre le problème suivant :

Trouver le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point M *et menées à toutes les courbes de la famille dont l'équation différentielle est*

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0.$$

Soit

$$(2) \qquad F(x, y, c) = 0$$

l'équation intégrale, les points de contact cherchés seront donnés par l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x - \alpha) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - \beta) = 0,$$

α et β désignant les coordonnées de M ; or on obtient (1) en éliminant c entre (2) et

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

Le lieu des points de contact cherchés s'obtient en éliminant c entre (3) et (2); or (3) ne diffère de (4) que parce que y' y est remplacé par $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$; donc le lieu cherché a pour équation

$$f\left(x, y, \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right) = 0.$$

Il est, comme l'on voit, de degré $\mu+\nu$, μ et ν désignant les caractéristiques de la famille (1). Si l'on suppose $\alpha = 0$, $\beta = 0$, les termes du degré le moins élevé de la courbe seront d'ordre μ et par suite, en M, le lieu aura un point multiple d'ordre μ.

Il résulte de là que :

Pour qu'une courbe transcendante puisse faire partie d'un système aux caractéristiques (μ, ν), *il faut que les points de contact des tangentes menées d'un point* M *à cette courbe soient situés sur une courbe d'ordre* $\mu+\nu$, *ayant un point multiple d'ordre* μ *en* M.

Cette condition est suffisante.

En effet, si elle est remplie, elle le sera en particulier quand on prendra M à l'infini dans la direction $y = y'x$; soit

$$\varphi(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

l'équation de la courbe de degré $\mu+\nu$ qui contient les points de contact des tangentes parallèles à $y = y'x$. L'équation (5) est une relation entre les coordonnées de la courbe transcendante donnée et le coefficient angulaire y' de sa tangente variable, quand le point M se déplace : c'est donc l'équation différentielle de cette courbe; elle définit un système aux caractéristiques (μ, ν), car, la courbe (5) ayant un point d'ordre μ à l'infini, son degré est ν en x et y; mais ce qui est curieux, c'est que *la courbe transcendante ne peut faire partie que d'un seul système* (μ, ν).

En effet, si elle pouvait appartenir à deux systèmes

$$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \psi(x, y, y') = 0,$$

les équations

$$\varphi\left(x, y, \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=0, \qquad \psi\left(x, y, \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)=0$$

représenteraient la même courbe algébrique, quels que soient α et β, et, en particulier, $\varphi(x, y, y')=0$ et $\psi(x, y, y')=0$ devraient, quel que soit y', représenter la même courbe algébrique : ces équations seraient donc identiques.

Exemple. — La courbe $y=\log x$ satisfait à $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ ou $x\frac{dy}{dx}-1=0$; ses caractéristiques sont $(1, 1)$, et elle ne peut satisfaire à un autre système de mêmes caractéristiques.

La sinusoïde a pour équation $y'^2+y^2=a^2$; ses caractéristiques sont $(2, 2)$; le lieu des points de contact des tangentes qu'on peut lui mener d'un point (α, β) appartient à la courbe

$$\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)^2+y^2=a^2 :$$

c'est une courbe du quatrième degré.

La théorie des caractéristiques, que nous venons d'exposer, est due à M. Fouret.

XV. — Des trajectoires orthogonales.

On appelle *trajectoires* d'une famille de courbes une seconde famille qui coupe les courbes de la première sous certaines conditions.

Les *trajectoires orthogonales* d'une famille de courbes sont des courbes coupant celles-ci à angle droit. Soit

$$f(x, y, c)=0$$

l'équation d'une famille de courbes, c la constante qui entre dans leur équation. En éliminant c entre cette équation et sa

dérivée relative à x on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy = 0;$$

c'est l'équation différentielle à laquelle conviennent toutes les courbes de la famille. Réciproquement, si l'on donne une équation différentielle

(1) $$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

sa solution étant de la forme $f(x, y, c) = 0$, elle pourra être considérée comme l'équation d'une famille de courbes. Soit donc proposé de trouver les trajectoires de la famille de courbes représentée par l'équation (1); on en tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q};$$

c'est la valeur du coefficient angulaire de l'une des courbes de la famille passant en x, y; alors $\frac{Q}{P}$ sera le coefficient angulaire de la trajectoire orthogonale passant au même point et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$$

sera son équation différentielle : il est clair que les trajectoires orthogonales forment une famille qui constitue l'intégrale de cette équation, que l'on peut écrire

$$P\,dy - Q\,dx = 0.$$

Exemples. — 1°

$$\frac{x^2}{a^2 - u^2} + \frac{y^2}{b^2 - u^2} = 1$$

représente une famille de coniques homofocales; en différentiant, on a

$$\frac{x\,dx}{a^2 - u^2} + \frac{y\,dy}{b^2 - u^2} = 0;$$

en éliminant u entre ces deux équations, on trouve, en désignant par h^2 la différence entre a^2 et b^2,

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - h^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0:$$

c'est l'équation différentielle de la famille en question.

Cette équation ne change pas quand on change $\frac{dy}{dx}$ en $-\frac{dx}{dy}$; donc elle appartient aux trajectoires orthogonales : nous l'avons d'ailleurs intégrée plus haut.

Les courbes représentées par une équation de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

en général, sont à elles-mêmes leurs propres trajectoires orthogonales.

2° Les lemniscates ayant pour foyers les points $(-c, 0)$ et $(+c, 0)$ ont pour équation

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4,$$

a désignant une constante; leur équation différentielle s'obtient par simple différentiation : elle est

$$(x^2 + y^2 + c^2)(x\,dx + y\,dy) - 2c^2x\,dx = 0;$$

celle des trajectoires s'obtient en changeant $\frac{dy}{dx}$ en $-\frac{dx}{dy}$; elle est donc

$$(x^2 + y^2 + c^2)(x\,dy - y\,dx) - 2c^2x\,dy = 0$$

ou

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)(x\,dy - y\,dx) - c^2(x\,dy + y\,dx) = 0.$$

Le premier terme a pour facteur d'intégrabilité (p. 44) $\frac{1}{(x^2 + y^2)x^2}$; en le multipliant par ce facteur, il devient $d\frac{y}{x}$; son facteur général est donc $\frac{1}{(x^2 + y^2)x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$ L'autre terme

a pour facteur $F(xy)$: on doit donc avoir, pour facteur de l'équation (1),

$$\frac{1}{(x^2+y^2)x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)=F(xy),$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}f\left(\frac{y}{x}\right)=x^2y^2F(xy),$$

ce qui aura lieu quand les deux membres seront constants. On peut donc prendre pour facteur $\frac{1}{x^2y^2}$. En appliquant ce facteur, l'équation (1) devient

$$\left[1+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{-1}\right]\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}-\frac{c^2(x\,dy+y\,dx)}{x^2y^2}=0$$

ou

$$\left[1+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{-1}\right]d\left(\frac{y}{x}\right)-c^2\frac{1}{x^2y^2}d(xy)=0$$

et, en intégrant,

$$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+\frac{c^2}{xy}=\text{const.}=k$$

ou

$$y^2-x^2-kxy=-c^2;$$

c'est l'équation d'une série d'hyperboles équilatères passant en $y=0$, $x=\pm c$.

3° Les trajectoires orthogonales d'une famille de droites peuvent toujours s'obtenir par de simples quadratures; du reste, les droites en question enveloppent une certaine courbe; leurs trajectoires orthogonales sont les développantes de cette courbe : nous allons donc avoir à notre disposition une méthode nouvelle pour trouver les développantes des courbes planes.

L'équation des droites en question est une équation de Clairaut : c'est l'équation d'une tangente à une courbe en fonction de son coefficient angulaire (p. 69); elle est de la forme

$$y=y'x+f(y')$$

ou

$$F(y - y'x, y') = 0.$$

Les trajectoires orthogonales s'obtiendront en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$; on aura alors

$$F\left(y + \frac{x}{y'}, -\frac{1}{y'}\right) = 0;$$

c'est une de ces équations qui, mise sous la forme

$$y + \frac{x}{y'} = f(y'),$$

coïncide avec l'équation de Lagrange et peut s'intégrer par de simples quadratures.

Les courbes intégrales n'ont pas en général d'enveloppe, mais l'enveloppe est remplacée par un lieu de rebroussements qui est la courbe elle-même.

4° Cherchons encore l'équation des trajectoires orthogonales d'une série de paraboles homofocales ayant le même axe

$$y^2 = 2px + p^2.$$

Leur équation différentielle, obtenue en éliminant p entre cette équation et sa dérivée relative à x est

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0;$$

on en tire d'abord $y = 0$, puis

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Cette équation est telle que le produit de ses racines est -1; donc elle est aussi celle des trajectoires orthogonales et il est inutile de l'intégrer; les paraboles en question sont donc à elles-mêmes leurs propres trajectoires.

Si cependant on tenait à intégrer l'équation à laquelle on est parvenu, on pourrait prendre pour variables x et

$r = \sqrt{x^2+y^2}$; en effet, l'équation proposée, résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad y\,dy = dx(x \pm r),$$

et, le changement de variable effectué, on a

$$r\,dr - x\,dx = x\,dx \pm r\,dx$$

ou

$$r\,dr = (2x \pm r)\,dx.$$

Cette équation (p. 55) est homogène; son intégrale est

$$r - x = \text{const.} \quad \text{ou} \quad r - x = p,$$

qui revient à la proposée.

5° Parmi les courbes orthogonales, nous signalerons encore les ovales de Descartes, représentées en coordonnées bipolaires r et r' par les équations suivantes, où a est une constante donnée et α, β des constantes arbitraires,

$$r - ar' = \alpha, \qquad r' + ar = \beta;$$

ce que l'on peut vérifier en construisant les normales aux deux courbes par la méthode de Poinsot. Les mêmes équations dans le système pôle-directrice fournissent aussi des courbes orthogonales.

6° La méthode de la transformation par rayons vecteurs réciproques n'altère pas les angles; elle permet donc, étant données des figures orthogonales, de trouver un autre système également orthogonal.

7° Les transformations homographiques altèrent en général les angles; on peut toutefois se demander quelles sont les lignes orthogonales qui restent telles après avoir subi une transformation homographique.

Pour répondre à cette question, on peut disposer les figures de manière qu'elles soient homologiques : cela fait, en prenant le centre d'homologie pour origine et l'axe d'homo-

logie parallèle à l'axe des y, on a les formules de transformation (p. 59, t. IV)

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{ax}{x-h}, \\ Y = \dfrac{ay}{x-h}, \end{cases}$$

a et h désignant des constantes. Soient δ et d deux caractéristiques relatives à deux déplacements orthogonaux : on aura

$$(2) \qquad \delta X\, dX - \delta Y\, dY = 0,$$

$$(3) \qquad \delta x\, dx + \delta y\, dy = 0.$$

Or on a

$$dX = -\frac{ah\, dx}{(x-h)^2}, \qquad \delta X = -\frac{ah\,\delta x}{(x-h)^2},$$

$$dY = \frac{a\,dy}{x-h} - \frac{ay\,dx}{(x-h)^2}, \qquad \delta Y = \frac{a\,\delta y}{x-h} - \frac{ay\,\delta x}{(x-h)^2};$$

(2) donne alors

$$\left[\frac{h^2}{(x-h)^4} + \frac{y^2}{(x-h)^4}\right]\delta x\, dx + \frac{1}{(x-h)^2}\,\delta y\, dy$$
$$-(\delta x\, dy + \delta y\, dx)\frac{y}{(x-h)^3} = 0$$

ou, en vertu de (3),

$$\frac{y}{(x-h)^3}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right] + \frac{dy}{dx}\left[\frac{1}{(x-h)^2} - \frac{h^2}{(x-h)^4} - \frac{y^2}{(x-h)^4}\right] = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$y(x-h)\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right] + \frac{dy}{dx}\left[(x-h)^2 - h^2 - y^2\right] = 0.$$

Si l'on remplace $x-h$ par x et $\frac{dy}{dx}$ par y', on a

$$xy(y'^2 - 1) + y'(x^2 - y^2 - h^2) = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une série d'ellipses et d'hyperboles homofocales : h est la demi-distance focale, $x - h = 0$ ou $x = h$ est l'équation de tous les grands axes (p. 74).

XVI. — Méthode propre à fournir une infinité de systèmes orthogonaux.

Nous avons vu que, si $f(x+y\sqrt{-1}) = X + Y\sqrt{-1}$ désignait une fonction monogène, c'est-à-dire une fonction ayant une dérivée unique, on avait

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Si l'on fait décrire au point dont les coordonnées sont x et y un certain chemin, le point X, Y décrit un autre chemin correspondant. Appelons s et S ces chemins : on a

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)^2 \\ &= (dx^2+dy^2)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\ &= ds^2\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}; \end{aligned}$$

dS est donc proportionnel à ds. Il résulte de là que, si l'on considère un triangle infinitésimal de côtés ds, ds', ds'', décrit par le point (x, y), à ce triangle correspondra un triangle de côtés dS, dS', dS'', décrit par le point (X, Y); les côtés du second triangle étant proportionnels à ceux du premier, ces deux triangles sont semblables; ils ont donc les angles égaux, et, par suite, à deux courbes ds, ds' décrites par le point (x, y) correspondent deux courbes dS, dS' décrites par le point (X, Y) qui se coupent sous le même angle. Nous allons maintenant étudier les conséquences de ce théorème.

Supposons que le point (X, Y) décrive des droites issues de l'origine et des circonférences concentriques à l'origine : l'argument de $f(x)$ dans le premier cas, son module dans le second cas, resteront tour à tour constants; les lignes décrites par le point (X, Y) sont orthogonales; donc les lignes décrites par le point (x, y) seront aussi orthogonales.

Quand le point (X, Y) décrit les cercles en question, on dit que le point (x, y) décrit les *courbes d'égal module* de la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$; quand (X, Y) décrit des droites issues de l'origine, le point (x, y) décrit les courbes *d'égal argument* de $f(x+y\sqrt{-1})$; *les courbes d'égal module et d'égal argument sont orthogonales.*

Cherchons les courbes d'égal module d'une fonction rationnelle

$$f(z)=\frac{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}{(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\lambda)},$$

$a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ désignant des quantités constantes. Faisons $z=x+y\sqrt{-1}$; le module de $f(z)$ est égal à

$$\frac{\operatorname{mod}(z-a)\operatorname{mod}(z-b)\ldots}{\operatorname{mod}(z-\alpha)\operatorname{mod}(z-\beta)\ldots};$$

or le module de $z-a$ est égal à la distance r_a du point z au point a; les courbes d'égal module, c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels le module de $f(z)$ sera constant, jouiront donc de la propriété exprimée par l'équation

$$(2)\qquad \frac{r_a r_b \ldots r_l}{r_\alpha r_\beta \ldots r_\lambda}=\text{const.}$$

L'argument de $f(z)$ est égal à

$$\arg(z-a)+\arg(z-b)+\ldots-\arg(z-\alpha)-\arg(z-\beta)-\ldots;$$

or $\arg(z-a)$ est égal à l'angle θ_a que fait la droite allant du point a au point z avec l'axe des x; les courbes d'égal argument de $f(z)$, c'est-à-dire les lieux des points pour lesquels l'argument de $f(z)$ est constant, ont pour équation

$$(3)\qquad \theta_a+\theta_b+\ldots+\theta_l-\theta_\alpha-\theta_\beta-\ldots-\theta_\lambda=\text{const.};$$

les courbes définies par les équations (2) et (3) constituent donc un système orthogonal.

Nous allons établir quelques propriétés des courbes qui nous occupent :

1° D'abord leurs tangentes se construiront on ne peut plus

facilement par la méthode de Poinsot et, par suite, les tangentes à leurs trajectoires orthogonales (t. II, p. 26); leurs rayons de courbure sont fournis par la méthode exposée (t. II, p. 122).

2° Elles présentent parfois des points multiples : ces points multiples sont les points où la dérivée de $f(z)$ s'annule, et les tangentes au nœud forment les rayons d'un polygone régulier, résultat que j'ai donné dans ma Thèse.

3° Reprenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{r_a r_b \dots r_l}{r_\alpha r_\beta \dots r_\lambda} = \text{const.} = k.$$

Soient a_1 et a_2 les coordonnées du point a, b_1 et b_2 celles du point b, etc.; on aura, en appelant x, y les coordonnées d'un point de la courbe,

$$r_a^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2,$$

et, si l'on pose

$$x + y\sqrt{-1} = z, \qquad x - y\sqrt{-1} = z',$$
$$a_1 + a_2\sqrt{-1} = a, \qquad a_1 - a_2\sqrt{-1} = a',$$

etc., on pourra écrire (1) ainsi

$$\frac{(z - a)(z' - a')(z - b)(z' - b')\dots}{(z - \alpha)(z' - \alpha')(z - \beta)(z' - \beta')\dots} = k^2,$$

ou, en posant, égale à $f'(z')$, la fonction obtenue en changeant, dans f, a, b, ..., z, ... en a', b', ..., z' ....

$$(2) \qquad f(z) f'(z') = k^2.$$

Nous ferons

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad f'(z') = \frac{\varphi'(z')}{\psi'(z')},$$

en désignant par φ, ψ, φ', ψ' les fonctions entières qui servent de numérateurs et de dénominateurs à f et f'; (2) s'écrira alors

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = k^2 \frac{\psi'(z')}{\varphi'(z')}.$$

ou, en appelant ω et ω' deux constantes,

$$\frac{\varphi(z) + \omega\psi(z)}{\varphi(z) + \omega'\psi(z)} = \frac{k^2\psi'(z') + \omega\varphi'(z')}{k^2\psi'(z') + \omega'\varphi'(z')},$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \frac{[\varphi(z) + \omega\psi(z)][k^2\psi'(z') + \omega'\varphi'(z')]}{[\varphi(z) + \omega'\psi(z)][k^2\psi'(z') + \omega\varphi'(z')]} = 1.$$

Cette équation est de même forme que (2), mais les points fixes ne sont plus les mêmes; ce sont les racines d'équations nouvelles différentes de $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, $\psi = 0$, $\psi' = 0$; mais les nouveaux pôles ne seront pas les mêmes pour toute la série de courbes à laquelle appartenait la courbe définie par l'équation (1) pour une valeur donnée de k. Donc :

Une fonction rationnelle étant donnée, ses courbes d'égal module pourront être les courbes d'égal module de bien d'autres fonctions rationnelles. Cette remarque est de M. Darboux.

4° L'un des nouveaux pôles pourra être choisi arbitrairement; en effet, on peut choisir ω et ω' de manière que le premier membre de (3) s'annule ou devienne infini, pour deux valeurs données, l'une de z et l'autre de z'.

5° On peut déterminer les foyers des courbes qui nous occupent de la manière suivante : formons l'équation (3) et déterminons ω et ω' de manière que deux des nouveaux pôles soient confondus; l'équation correspondante de la courbe sera, par exemple, de forme

$$\frac{r_a^2 r_b \ldots r_l}{r_\alpha r_\beta \ldots r_\lambda} = k^2,$$

et les points d'où émanent les rayons doubles seront évidemment des foyers.

Les courbes que nous venons d'étudier sommairement com-

prennent le cercle $\frac{r_a}{r_b} =$ const., la lemniscate $r_a r_b =$ const.; on peut donc dire que :

Les trajectoires orthogonales d'une série de cercles, tels que le rapport des distances de leurs points à deux points fixes soit constant se compose d'une série de cercles passant par les deux points fixes.

Les trajectoires orthogonales d'une série de lemniscates ayant les mêmes foyers sont des hyperboles équilatères qui passent par les foyers.

La théorie des imaginaires fournit encore un autre exemple de trajectoires orthogonales; ainsi les équations

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

qui expriment que les premiers membres des équations

$$X\,dy + Y\,dx = 0,$$
$$X\,dx - Y\,dy = 0$$

sont des différentielles exactes, expriment aussi que les courbes représentées par ces équations sont trajectoires orthogonales les unes des autres. De là une foule de systèmes dont les trajectoires orthogonales s'obtiendront par des quadratures. Quand on prend $X + Y\sqrt{-1} = x + y\sqrt{-1}$, les équations précédentes représentent des hyperboles équilatères. Quand on prend $X + Y\sqrt{-1} = (x + y\sqrt{-1})^2$, on a les courbes orthogonales

$$x^2 y - \frac{y^3}{3} = \text{const.}, \qquad xy^2 - \frac{x^3}{3} = \text{const.}$$

XVII. — Sur les connexes.

Considérons une équation à six variables, homogène,

$$(1) \qquad f(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta) = 0,$$

dans laquelle x, y, z sont les coordonnées d'un point et

ξ, η, ζ les coordonnées tangentielles d'une droite. Cette équation représente ce que Clebsch appelle un *connexe*. Un connexe est algébrique ou transcendant, suivant que son équation est algébrique ou transcendante.

Dans le cas où le connexe est algébrique, son *ordre* est le degré de f par rapport à x, y, z. Sa *classe* est le degré de f par rapport à ξ, η, ζ.

Clebsch appelle *coïncidence* l'ensemble de deux connexes ou plutôt l'ensemble des valeurs $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ satisfaisant à la fois aux équations de deux connexes.

Si l'on considère trois connexes, on peut entre leurs équations éliminer x, y, z ou ξ, η, ζ; ils peuvent donc être censés représenter un couple de courbes, l'une en coordonnées ordinaires, l'autre en coordonnées tangentielles.

Considérons un point P et une droite D *appartenant au connexe* (1), c'est-à-dire dont les coordonnées satisfont à l'équation du connexe; simultanément, P et D constitueront un *élément* du connexe.

Au point P correspond une courbe enveloppe Γ qui a pour équation (1), dans laquelle x, y, z sont remplacés par les coordonnées de P; de même à la droite D correspond une courbe C, dont l'équation est (1), dans laquelle ξ, η, ζ sont remplacés par les coordonnées de D, et, si le connexe est de $m^{\text{ième}}$ ordre et de $n^{\text{ième}}$ classe, m et n seront le degré et la classe des courbes Γ et C.

Ceci posé, soient P et D un élément du connexe (1), P étant un point de C qui correspond à D, et D une droite tangente à Γ qui correspond à P. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point P_1 de contact de D et Γ; ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées de la tangente D_1 à C menée par le point P; P_1 et D_1 constitueront un élément d'un nouveau connexe que l'on appelle *conjugué* du premier (1).

Le point (x_1, y_1, z_1) est à l'intersection des deux tangentes ξ, η, ζ et $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$: la droite ξ_1, η_1, ζ_1 joint les points x, y, z et $x + dx, y + dy, z + dz$, x, y, z restant constants quand ξ, η, ζ reçoivent les accroissements

$d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ et ξ, η, ζ restant constants quand x, y, z reçoivent les accroissements dx, dy, dz. On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}d\zeta = 0. \tag{3}$$

On a d'ailleurs

$$\frac{x_1}{\eta\,d\zeta - \zeta\,d\eta} = \frac{y_1}{\zeta\,d\xi - \xi\,d\zeta} = \frac{z_1}{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}, \tag{4}$$

$$\frac{\xi_1}{y\,dz - z\,dy} = \frac{\eta_1}{z\,dx - x\,dz} = \frac{\zeta_1}{x\,dy - y\,dx}, \tag{5}$$

et, comme conséquence de ces équations,

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta = 0, \tag{6}$$

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z = 0, \tag{7}$$

$$x_1\,d\xi + y_1\,d\eta + z_1\,d\zeta = 0, \tag{8}$$

$$\xi_1\,dx + \eta_1\,dy + \zeta_1\,dz = 0. \tag{9}$$

Si l'on remarque qu'en définitive $d\zeta$ et dz sont nuls, les formules (8), (9), (2) et (3) donneront

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\xi_1}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\zeta_1}\frac{\partial f}{\partial z},\\ \frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{1}{y_1}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{z_1}\frac{\partial f}{\partial \zeta}; \end{aligned}\right. \tag{10}$$

en éliminant entre ces équations et (1) ξ, η, ζ, x, y, z, on aura l'équation du connexe conjugué.

Le conjugué du connexe conjugué de $f = 0$ est le connexe $f = 0$ lui-même.

En effet, soit $F(x_1, y_1, z_1; \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0$ l'équation du connexe conjugué de $f = 0$; si, dans l'équation $F = 0$, on remplace $x_1, y_1, z_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ par leurs valeurs proportion-

nelles (10), on reproduira f à un facteur M près. Ainsi

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \ldots; \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots\right) = \mathrm{M} f(x, \ldots; \xi, \ldots),$$

ou, en posant pour abréger $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \ldots, \frac{\partial f}{\partial \xi} = f'_1 \ldots$.

$$\mathrm{F}(f'_1, \ldots; f_1, \ldots) = \mathrm{M} f(x, \ldots, \xi, \ldots);$$

or le connexe conjugué de F sera donné par

$$\frac{1}{\xi_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} = \frac{1}{\eta_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_1} = \frac{1}{\zeta_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1},$$
$$\frac{1}{x_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \xi_1} = \frac{1}{y_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta_1} = \frac{1}{z_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta_1}, \qquad \mathrm{F} = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{1}{\xi_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial f_1} = \ldots, \qquad \frac{1}{x_2}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial f'_1} = \ldots, \qquad \mathrm{F} = 0;$$

ou bien encore, en observant que $f = 0$ et que, par conséquent, $\frac{\partial \mathrm{M} f}{\partial x} = \mathrm{M}\frac{\partial f}{\partial x}$,

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\xi_2}\dfrac{\partial f}{\partial f_1} = \dfrac{1}{\eta_2}\dfrac{\partial f}{\partial f_2} = \dfrac{1}{\zeta_2}\dfrac{\partial f}{\partial f_3}, \\ \dfrac{1}{x_2}\dfrac{\partial f}{\partial f'_1} = \dfrac{1}{y_2}\dfrac{\partial f}{\partial f'_2} = \dfrac{1}{z_2}\dfrac{\partial f}{\partial f'_3}, \qquad f = 0. \end{cases}$$

Or on a

$$m f = f_1 x + f_2 y + f_3 z,$$
$$n f = f'_1 \xi + f'_2 \eta + f'_3 \zeta,$$

et, par suite,

$$m\,df = \sum f_1\,dx + \sum x\,df_1,$$

$$n\,df = \sum f'_1\,d\xi + \sum \xi\,df'_1;$$

mais

$$df = \sum f_1\,dx + \sum f'_1\,d\xi,$$

donc

$$(m + n - 1)\,df = \sum x\,df_1 + \sum \xi\,df'_1.$$

Il résulte de là que

$$(m+n-1)\frac{\partial f}{\partial f_1} = x, \qquad (m+n-1)\frac{\partial f}{\partial f_2} = y, \qquad \ldots,$$

$$(m+n-1)\frac{\partial f}{\partial f'_1} = \xi, \qquad (m+n-1)\frac{\partial f}{\partial f'_2} = \eta, \qquad \ldots;$$

les formules (11) donnent alors

$$\frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2} = \frac{z}{z_2}, \qquad \frac{\xi}{\xi_2} = \frac{\eta}{\eta_2} = \frac{\zeta}{\zeta_2},$$

ce qui démontre notre théorème.

Pour terminer ce que nous avons à dire du connexe conjugué, nous ferons observer qu'un connexe peut être son propre conjugué; les connexes, qui sont à eux-mêmes leurs propres conjugués, sont définis par l'équation

$$f\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial f}{\partial \zeta}; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

dont il paraît difficile d'obtenir la solution générale, mais dont on peut avoir facilement des solutions particulières.

XVIII. — Coïncidence principale. — Connexe identique.

Le connexe

(1) $$x\xi + y\eta + z\zeta = 0$$

est ce que l'on appelle le *connexe identique;* au point (x, y, z) dans ce connexe, correspondent toutes les droites passant par ce point, et à la droite (ξ, η, ζ) correspondent tous les points situés sur cette droite.

Soit

(2) $$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation d'un connexe quelconque : les équations (1), (2) représenteront ce que l'on appelle la *coïncidence principale* du connexe (2). Dans cette coïncidence, au point (x, y, z)

correspondent un nombre fini de droites passant par ce point, et à une droite (ξ, η, ζ) correspondent un nombre fini de points situés sur cette droite.

Supposons que l'on donne à x, y, z des valeurs a, b, c; en vertu de (2), la droite (ξ, η, ζ) enveloppera une courbe Γ; et, en vertu de (1), (2), au point (a, b, c) correspondra une ou plusieurs tangentes à Γ contenant le point (a, b, c). Si l'on donne à (ξ, η, ζ) des valeurs α, β, γ, le point (x, y, z) se trouvera, en vertu de (2), sur une courbe C, et, en vertu de (1) et (2), à la droite (α, β, γ) correspondront un nombre fini de points situés sur la courbe C et sur la droite (α, β, γ).

A chaque point (x, y, z) correspondent un certain nombre fini de droites passant par ce point ou, si l'on veut, un nombre fini d'éléments dx, dy, dz dans la direction de ces droites; entre x, y, z et dx, dy, dz, il existe une relation que nous allons chercher, et qui définit une famille de courbes.

Quand x, y, z croissent des quantités dx, dy, dz, dont il vient d'être question, ξ, η, ζ restent constants : on a donc, non seulement

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0,$$

mais encore

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\xi}{y\,dz - z\,dy} = \frac{\eta}{z\,dx - x\,dz} = \frac{\zeta}{x\,dy - y\,dx};$$

portant les valeurs de ξ, η, ζ dans (2), on a

$$(3)\qquad f(x, y, z, y\,dz - z\,dy, z\,dx - x\,dz, x\,dy - y\,dx) = 0;$$

telle est l'équation différentielle qui définit la famille de courbes dont nous avons parlé et que nous appellerons les courbes *connexes* de $f = 0$.

De même à chaque droite (ξ, η, ζ) correspond un certain nombre fini de points sur cette droite, et, quand (ξ, η, ζ) subissent des accroissements $d\xi, d\eta, d\zeta$, de manière qu'elle tourne autour de l'un de ces points, il existe des relations

entre ξ, η, ζ qui définissent une enveloppe dont l'équation différentielle est

$$f(\eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta, \ldots, \xi, \eta, \zeta) = 0,$$

et qui sont aussi des courbes connexes de $f = 0$.

XIX. — Rôle des connexes dans la théorie des équations différentielles du premier ordre.

Considérons maintenant une équation différentielle du premier ordre, si l'on y regarde la variable x et la fonction y comme les coordonnées d'un point, on pourra la présenter sous la forme

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

et, sans nuire à la généralité, sous cette autre forme

$$\varphi(x, y, dx, dy, x\, dy - y\, dx) = 0$$

ou enfin, en remplaçant x par $\frac{x}{z}$ et y par $\frac{y}{z}$:

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, y\, dz - z\, dy, z\, dx - x\, dz, x\, dy - y\, dx) = 0,$$

φ désignant une fonction homogène par rapport à x, y, z; dx, dy, dz.

Mais, d'après ce que l'on vient de voir, si l'on considère la coïncidence principale

$$\varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0,$$

$$x\xi - y\eta - z\zeta = 0,$$

ses courbes connexes auront (1) pour équation différentielle; ainsi *toute équation différentielle du premier ordre représente les courbes connexes d'une certaine coïncidence principale.*

Cette remarque est féconde, elle conduit à des conclusions importantes touchant la théorie des équations différentielles.

Et d'abord, étant donnée une coïncidence principale

$$f = 0, \quad x\xi + y\eta + z\zeta = 0,$$

algébrique de degré m et de classe n, on peut la remplacer par

$$f + \lambda M = 0, \quad x\xi + y\eta + z\zeta = 0,$$

M désignant une expression de degré $m - 1$ et de classe $n - 1$ et λ désignant l'expression $x\xi + y\eta + z\zeta$. On ne change pas ainsi les courbes de coïncidence ; de là un moyen de transformer une équation différentielle en une autre qui dépendra de la forme attribuée à M et qui pourra être parfois plus facile à intégrer.

XX. — Transformation des connexes et des équations différentielles.

On peut simplifier un connexe $f(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = 0$ en lui faisant subir une substitution, telle que

$$(1) \qquad \frac{x'}{\varphi_1} = \frac{y'}{\varphi_2} = \frac{z'}{\varphi_3} = \rho,$$

$$(2) \qquad \frac{\xi'}{\psi_1} = \frac{\eta'}{\psi_2} = \frac{\zeta'}{\psi_3} = \sigma,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; ψ_1, ψ_2, ψ_3 désignant des fonctions entières de x, y, z; ξ, η, ζ. On lui fait alors subir ce que l'on appelle une *substitution rationnelle*. On peut faire subir la même substitution à une coïncidence, et, en nous plaçant au point de vue des équations différentielles, on peut se demander :

Quelles sont les substitutions (1), (2) *qui transforment la coïncidence principale du connexe*

$$(3) \qquad f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

en une autre coïncidence principale?

Ces conditions exigent que

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0$$

deviennent

$$\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z' = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi'\, dx' + \eta'\, dy' + \zeta'\, dz' = 0$$

ou

$$\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \varphi_3 \psi_3 = 0, \qquad \psi_1\, d\varphi_1 + \psi_2\, d\varphi_2 + \psi_3\, d\varphi_3 = 0.$$

La première de ces formules doit donner lieu à l'identité

$$(4) \qquad \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \varphi_3 \psi_3 = \mathrm{M} f + \mathrm{N}(x\xi + y\eta + z\zeta);$$

la seconde peut s'écrire

$$(5) \qquad \sum \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\, d\xi + \ldots \right) = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned} x\, d\xi + y\, d\eta + z\, d\zeta &= 0, \\ x\xi + y\eta + z\zeta &= 0, \\ x f_1 + y f_2 + z f_3 &= 0, \end{aligned}$$

$f_1, f_2, f_3, f'_1, f'_2, f'_3$ désignant pour abréger $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \xi}, \ldots;$ de ces équations on conclut pour $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ des expressions de la forme

$$(6) \quad d\xi = f_1\, d\mathrm{U} + \xi\, d\mathrm{V}, \quad d\eta = f_2\, d\mathrm{U} + \eta\, d\mathrm{V}, \quad d\zeta = f_3\, d\mathrm{U} + \zeta\, d\mathrm{V}.$$

De même

$$(7) \quad dx = f'_1\, d\mathrm{U}' + x\, d\mathrm{V}', \quad dy = f'_2\, d\mathrm{U}' + y\, d\mathrm{V}', \quad dz = f'_3\, d\mathrm{U}' + z\, d\mathrm{V}';$$

portant ces valeurs dans l'identité

$$f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz + f'_1\, d\xi + f'_2\, d\eta + f'_3\, d\zeta = 0,$$

on a, toutes réductions faites,

$$(f_1 f'_1 + f_2 f'_2 + f_3 f'_3)(d\mathrm{U} + d\mathrm{U}') = 0,$$

c'est-à-dire $d\mathrm{U} = -d\mathrm{U}'$; car, en général, f étant donné, on n'a pas $f_1 f'_1 + f_2 f'_2 + f_3 f'_3 = 0$. Or l'équation (5), en vertu

de (6) et (7), devient aussi

$$\psi_1 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} (f'_1\, dU' + x\, dV') + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} (f_1\, dU + \xi\, dV) + \ldots \right] + \ldots = 0$$

ou, en vertu de $dU + dU' = 0$ et de

$$x \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \ldots + \xi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \ldots = s \varphi_1,$$

s désignant le degré de φ_1,

$$\begin{aligned} (\mathrm{P}\, dV + \mathrm{P}'\, dV')(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3) \\ + dU \sum \sum \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned}$$

P et P′ désignant des polynômes entiers; cette équation peut s'écrire

$$(8) \qquad \sum \psi_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \mathrm{M}' f + \mathrm{N}'(x\xi + y\eta + z\zeta).$$

Si l'on soumet l'équation (4) à l'opération

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \right),$$

on trouve

$$(9) \qquad \sum \varphi_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \mathrm{M}'' f + \mathrm{N}''(x\xi + y\eta + z\zeta).$$

Pour que la coïncidence principale de $f = 0$ se transforme en une autre coïncidence principale, il faut qu'il existe des polynômes M′, N′, M″, N″ *donnant lieu aux identités* (8) *et* (9).

XXI. — Sur le facteur d'intégrabilité.

Toute équation différentielle du premier ordre peut théoriquement être ramenée à la forme

$$\mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy = 0$$

ou, en remplaçant x par $\frac{x}{z}$ et y par $\frac{y}{z}$,

$$P(z\,dx - x\,dz) + Q(z\,dy - y\,dz) = 0,$$

et cette forme est un cas particulier de la suivante

$$(1)\quad L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

qui représente les courbes connexes de la coïncidence principale

$$(2)\qquad \begin{cases} L\xi + M\eta + N\zeta = 0, \\ x\xi + y\eta + z\zeta = 0, \end{cases}$$

L, M, N désignant des fonctions de x, y, z. Cherchons le facteur d'intégrabilité μ du premier membre de (1);

$$\mu[L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx)]$$

doit être une différentielle exacte; par suite, on doit avoir

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mu(Nx - Lz)}{\partial z} = \dfrac{\partial\mu(Ly - Mx)}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial\mu(Ly - Mx)}{\partial x} = \dfrac{\partial\mu(Mz - Ny)}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial\mu(Mz - Ny)}{\partial y} = \dfrac{\partial\mu(Nx - Lz)}{\partial x}. \end{cases}$$

Si l'on développe la première de ces formules, par exemple en désignant par m le degré des fonctions homogènes L, M, N, on trouve

$$x\left(N\frac{\partial\mu}{\partial z} + M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) - L\left(z\frac{\partial\mu}{\partial z} + y\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) + \mu x\left(\frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) - 2\mu L - \mu\left(z\frac{\partial L}{\partial z} + y\frac{\partial L}{\partial y}\right) = 0$$

ou bien

$$x\left(L\frac{\partial\mu}{\partial x} + M\frac{\partial\mu}{\partial y} + N\frac{\partial\mu}{\partial z}\right) - L\left(x\frac{\partial\mu}{\partial x} + y\frac{\partial\mu}{\partial y} + z\frac{\partial\mu}{\partial z}\right) + \mu x\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) - 2\mu L - \mu\left(x\frac{\partial L}{\partial x} + y\frac{\partial L}{\partial y} + z\frac{\partial L}{\partial z}\right) = 0.$$

Soit pour un moment α le degré de μ : cette équation, en vertu du théorème des fonctions homogènes, deviendra

$$x\left(L\frac{\partial\mu}{\partial x}+M\frac{\partial\mu}{\partial y}+N\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)$$
$$+L\alpha\mu+\mu x\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)+2\mu L+\mu m L=0;$$

si donc on avait

$$\alpha+2+m=0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha=-(m+2),$$

on aurait simplement

$$(4)\qquad L\frac{\partial\mu}{\partial x}+M\frac{\partial\mu}{\partial y}+N\frac{\partial\mu}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0,$$

et chacune des formules (3) fournirait la formule unique (4). Cette formule (4) fournira un facteur d'intégrabilité du degré $-(m+2)$.

M. Darboux a remarqué que l'on pouvait simplifier l'équation (4) et supposer

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0;$$

en effet, en ajoutant au premier membre de (4) l'expression nulle

$$\Lambda[x(y\,dz-z\,dy)+y(z\,dx-x\,dz)+z(x\,dy-y\,dx)],$$

où Λ est homogène de degré $m-1$, l'expression

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}$$

devient

$$\frac{\partial(L+\Lambda x)}{\partial x}+\frac{\partial(M+\Lambda y)}{\partial y}+\frac{\partial(N+\Lambda z)}{\partial z}$$

ou

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}+(m+2)\Lambda;$$

il suffit donc, pour annuler $\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}$, de prendre

$$\Lambda=-\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)\frac{1}{m+2}.$$

XXII. — Problème des trajectoires réciproques.

Le problème des trajectoires réciproques, qui a été l'objet des recherches de Jean Bernoulli et d'Euler, peut s'énoncer comme il suit :

Trouver une courbe MN (*fig.* 1), *telle que sa symétrique par rapport à l'axe des* y, *transportée parallèlement à l'axe des* y, *coupe toujours cette courbe* MN *sous le même angle.*

Soient M′ N′ la symétrique de MN par rapport à l'axe des

Fig. 1.

y; M″ N″ cette courbe transportée parallèlement à l'axe des y : on devra avoir toujours

$$\text{MBM}'' = \text{MAM}'.$$

Soient x l'abscisse OP et y l'ordonnée PB,

$$\text{PQ} = y' \qquad \text{et} \qquad \text{MAM}' = \alpha;$$

on devra avoir

$$\text{angle MBM}'' = \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\text{arc tang}\,\frac{dx}{dy} + \text{arc tang}\,\frac{dx}{dy'} = \alpha.$$

Or y' est une fonction connue de x; car, l'équation de la courbe primitive étant $y = f(x)$, on aura

$$y' = f(-x);$$

on aura donc

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{f'(x)} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{f'(-x)} = \alpha.$$

Si l'on fait

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{2}\alpha = \varphi(x);$$

on a

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{f'(-x)} - \frac{1}{2}\alpha = -\varphi(x) = \varphi(-x);$$

pour résoudre le problème, il suffira donc d'égaler à une fonction impaire quelconque $\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{2}\alpha$, et l'on aura

$$\frac{1}{f'(x)} = \operatorname{tang}\left[\frac{1}{2}\alpha + \varphi(x)\right],$$

$$f(x) = \int \cot\left[\frac{1}{2}\alpha + \varphi(x)\right] dx.$$

XXIII. — Problème de Biot.

Trouver une courbe plane telle que tous les rayons lumineux émanés d'un point fixe A, *après deux réflexions sur la courbe, viennent repasser par le point* A.

Rapportons la figure à des coordonnées polaires : prenons le point A pour pôle et soient M et M′ les points d'incidence du rayon lumineux émané de A; soient r, θ les coordonnées polaires de M; r', θ' celles de M′; soient enfin μ et μ' les angles que les tangentes en M et en M′ à la courbe cherchée font avec les rayons r et r' respectivement; il est facile de voir que l'on a

$$\mu - \mu' = \theta - \theta' \quad \text{ou} \quad \mu - \theta = \mu' - \theta';$$

donc l'angle $\mu - \theta$ est constant, ce qui fournit l'équation différentielle

$$\frac{\operatorname{tang}\mu - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}\mu \operatorname{tang}\theta} = a,$$

a désignant une constante. Cette formule donne

$$\frac{r\,d\theta - dr \operatorname{tang}\theta}{dr + r \operatorname{tang}\theta\, d\theta} = a$$

ou

$$\frac{dr}{r} = \frac{1 - a \operatorname{tang}\theta}{a + \operatorname{tang}\theta}\, d\theta = \frac{d(a\cos\theta + \sin\theta)}{a\cos\theta - \sin\theta};$$

on en conclut

$$r = c(a\cos\theta + \sin\theta),$$

c désignant une constante : cette équation est l'équation générale des cercles passant par l'origine.

EXERCICES ET NOTES.

Voici des exercices relatifs aux équations que l'on intègre immédiatement ou par des quadratures.

1. Intégrer

$$dx\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) + dy\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) = 0.$$

2. Intégrer

$$[\,dx(2xy + y^2 - 1) + dy(2xy + x^2 - 1)]\,\frac{1}{(x+y)^2} = 0.$$

3. Entre les coordonnées à l'origine a, b de la normale à une courbe, on a la relation $\frac{a}{b} = \text{const.}$, quelle est cette courbe?

Même question en remplaçant le mot *normale* par le mot *tangente*.

4. Trouver une courbe dans laquelle la distance d'un point fixe à la tangente est proportionnelle au rayon vecteur issu de ce point, — au carré du rayon vecteur, — à l'inverse du rayon vecteur.

5. Trouver une courbe dans laquelle la normale et la tangente interceptent sur une droite fixe un segment de longueur constante.

6. Trouver une courbe dans laquelle la normale, la tangente et une droite fixe forment un triangle d'aire constante.

Les questions suivantes se rapportent à la recherche du facteur d'intégrabilité.

7. Intégrer

$$(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$$

(le facteur est fonction de x).

8. Intégrer

$$[y(x^2 + y^2) - xy]\,dx + x^2\,dy = 0.$$

9. Intégrer

$$(x^2 - y^2 - 1)\,dy + xy\,dx = 0.$$

10. Intégrer

$$dx(x - ky) - dy(y - kx) = 0;$$

c'est une équation homogène; un facteur a pour valeur

$$[x(x - ky) - y(y - kx)]^{-1};$$

on propose d'en trouver un autre et d'en conclure l'intégrale générale.

11. Pour intégrer l'équation $y = f(x, y')$, où $y' = \dfrac{dy}{dx}$, on la différentie et l'on a

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\frac{dy'}{dx}.$$

Prouver que le facteur λ d'intégrabilité de cette dernière équation satisfait à

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y'\right) + \lambda = \frac{\partial f}{\partial y'}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x}. \qquad \text{(Alexeieff.)}$$

Les exercices suivants conduisent à des équations homogènes ou réductibles à de telles équations.

12. Trouver une courbe dans laquelle la normale et la tangente sont également distantes d'un point fixe.

13. Trouver une courbe dans laquelle, le rayon vecteur étant décomposé en deux droites suivant la normale et la tangente, l'aire du rectangle de ces deux droites soit proportionnelle au carré du rayon vecteur.

14. Trouver une courbe dans laquelle le rapport des distances de la normale à deux points fixes soit constant.

15. Trouver une courbe telle que le lieu des milieux des tangentes ou des normales soit une ligne droite.

Les questions suivantes se ramènent à l'intégration d'équations linéaires.

16. Intégrer

$$\frac{dy}{dx}(x+y) - y^2 = 0.$$

17. Trouver une courbe telle que le coefficient angulaire de la tangente soit une moyenne arithmétique entre le coefficient angulaire du rayon vecteur et l'inverse de ce coefficient angulaire (en coordonnées rectilignes l'équation est homogène).

18. L'équation

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\sin y + \mathrm{F}(x)\cos y + \varphi(x) = 0$$

se ramène à

$$\frac{dz}{dx} + \mathrm{P}z^2 + \mathrm{Q}z - \mathrm{R} = 0,$$

en posant $\tang\frac{1}{2}y = z$.

(Liouville, *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XI.)

19. Intégrer

$$x^3\frac{dy}{dx} - y^2 - x^2 y + x^2 = 0,$$

sachant que $y = x$ est une solution.

20. Intégrer

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + y^2 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} + y^2 = 0.$$

Les exercices suivants sont relatifs aux équations que l'on peut intégrer en les différentiant.

21. Entre les coordonnées à l'origine de la normale (ou de la tangente) d'une courbe a et b, il existe la relation

$$a + b = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad ab = \text{const.};$$

trouver la courbe.

22. Trouver une courbe dans laquelle la portion de normale interceptée entre deux droites rectangulaires soit constante.

23. Trouver une courbe dans laquelle le produit des distances de la normale à deux points fixes soit constant.

24. Trouver une courbe dans laquelle la normale et la tangente interceptent sur une droite fixe des segments dont le rapport soit constant.

25. Trouver une courbe dans laquelle la distance de la normale à un point fixe soit proportionnelle à l'arc. (Exprimer les coordonnées polaires de la courbe en fonction de l'arc.)

26. L'équation de Clairaut $y = y'x + f(y')$ est la seule que l'on intègre en y remplaçant y' par une constante. (MANSION.)

27. Courbe dans laquelle la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante.

28. Intégrer l'équation

$$F(y - y'x) = y'.$$

29. Intégrer

$$(1 + x^2)y'^2 - 2xyy' - (1 - y^2) = 0.$$

30. Trouver la route suivie par un rayon lumineux qui traverse un milieu dans lequel l'indice de réfraction varie proportionnellement à la profondeur.

31. Trouver la développante de la chaînette $y = \frac{1}{2m}(e^{mx} + e^{-mx})$ en prenant pour origine de cette développante sur la courbe le point le plus bas de la chaînette. — Cette développante porte le nom de *tractrice;* — la tractrice est la courbe dont la tangente est constante : — c'est aussi la trajectoire orthogonale d'une série de cercles ayant leurs centres en ligne droite et le même rayon.

32. Trouver les trajectoires orthogonales d'une série de cercles tangents à deux droites quelconques.

33. On appelle *trajectoires obliques* d'une famille de courbes les courbes qui coupent celles-ci sous un angle constant.

Trouver les trajectoires obliques des tangentes au cercle.

34. Trouver les trajectoires obliques d'une série de paraboles ayant même foyer et même axe.

35. Trouver une courbe telle que, si sur la tangente, à partir du point de contact M, on prend une longueur constante MN, le lieu des points N soit un cercle. (Prendre des coordonnées polaires.)

36. Trouver les trajectoires orthogonales d'une série de cercles de rayon constant passant par un point fixe. — La tangente polaire de ces courbes est constante. — Trouver les développées de ces courbes.

37. Trouver les trajectoires orthogonales d'une série d'hyperboles équilatères ayant les mêmes asymptotes (hyperboles).

38. Intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

a, b, c, a', b', c' désignant des constantes $\left(\text{remplacer } y \text{ par } \frac{1}{y} \text{ et } x \text{ par } \frac{1}{x}\right)$.

39. Intégrer

$$ax^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy(y - 2a)\frac{dy}{dx} - 2y^2(y - 2a) = 0,$$

a désignant une constante.

(Proposé au Concours de Licence, juillet 1884.)

40. Si l'on pose

$$X + Y\sqrt{-1} = \operatorname{sn}(x + y\sqrt{-1}),$$

ou

$$X + Y\sqrt{-1} = \operatorname{cn}(x + y\sqrt{-1}),$$

ou

$$X + Y\sqrt{-1} = \operatorname{dn}(x + y\sqrt{-1}),$$

et si l'on suppose alternativement $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, on obtient des courbes orthogonales lieux des points X, Y, que l'on demande d'étudier.

(Siebeck, *Crelle*, t. 57.)

41. Trouver l'équation générale des courbes dont l'arc est égal au segment intercepté sur une droite fixe par les rayons vecteurs des extrémités de cet arc, issus d'un point fixe (ces courbes ont été étudiées par M. Maurice d'Ocagne).

CHAPITRE III.

DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. — Préliminaires.

On appelle *équations linéaires* les équations de la forme

$$(1)\qquad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = P$$

ou, en posant, pour abréger, $\frac{d^i y}{dx^i} = y^i$,

$$X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y = P,$$

dans lesquelles X_n, X_{n-1}, ..., X_0, P sont des fonctions quelconques de x; P est ce que l'on appelle le *second membre* de l'équation.

Nous étudierons tout d'abord les propriétés des équations sans second membre : nous allons voir en effet que, quand on a intégré une équation privée de son second membre, il suffit d'ajouter à l'intégrale trouvée une solution de l'équation avec second membre pour obtenir la solution générale de cette équation. Nous verrons dans la suite comment on peut toujours déduire de l'intégrale de l'équation privée de son second membre une solution de l'équation avec second membre, et cela au moyen des quadratures.

Soit u la solution générale de l'équation

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0,$$

qui n'est autre que (1), dans laquelle on a remplacé P par

zéro; on aura identiquement

$$(2)\qquad X_0\frac{d^n u}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+X_n u=0.$$

Soit alors z une solution de l'équation (1) : on aura

$$(3)\qquad X_0\frac{d^n z}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+X_n z=P;$$

si alors on fait $y=u+z$, l'équation (1) deviendra

$$\left(X_0\frac{d^n u}{dx^n}+\ldots+X_n u\right)+\left(X_0\frac{d^n z}{dx^n}+\ldots+X_n z\right)=P$$

et sera identiquement satisfaite en vertu de (2) et (3). Or u renferme n constantes arbitraires, puisque c'est la solution générale de (2); donc $u+z$, renfermant ces constantes aussi, est la solution générale de (1); donc :

Théorème. — *Pour obtenir la solution générale d'une équation linéaire, il suffit d'ajouter à la solution générale de cette équation privée de second membre une solution particulière de l'équation proposée elle-même.*

II. — Forme de l'intégrale générale d'une équation linéaire sans second membre.

Théorème I. — *Si y_1 est une solution de l'équation*

$$(1)\qquad X_0\frac{d^n y}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+X_n y=0,$$

que nous écrirons aussi

$$(1)\qquad X_0 y^n+X_1 y^{n-1}+\ldots+X_n y=0,$$

dans laquelle $X_0, X_1, \ldots, X_n$ désignent des fonctions quelconques de x, et, si c_1 désigne une constante arbitraire, $c_1 y_1$ sera encore une solution de la même équation.

En effet, puisque y_1 est solution de l'équation (1), on aura

$$X_0 y_1^n+X_1 y_1^{n-1}+\ldots+X_n y_1=0$$

et, par suite aussi, en multipliant par c_1,

$$X_0 c_1 y_1^n + X_1 c_1 y_1^{n-1} + \ldots + X_n c_1 y_1 = 0,$$

ce qui exprime que $c_1 y_1$ est une solution de l'équation (1).

C. Q. F. D.

Théorème II. — *En général, si l'on désigne par y_1, y_2, ..., y_i des solutions de l'équation* (1) *et par c_1, c_2, ..., c_i des constantes arbitraires, l'expression*

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_i y_i$$

sera encore une solution de la même équation.

En effet, si l'on remplace dans l'équation (1) la fonction y par

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_i y_i,$$

on trouve

$$\begin{aligned} &X_0(c_1 y_1^n + c_2 y_2^n + \ldots + c_i y_i^n) \\ &+ X_1(c_1 y_1^{n-1} + c_2 y_2^{n-1} + \ldots + c_i y_i^{n-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ X_n(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_i y_i) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &c_1(X_0 y_1^n + X_1 y_1^{n-1} + \ldots + X_n y_1) \\ &+ c_2(X_0 y_2^n + X_1 y_2^{n-1} + \ldots + X_n y_2) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Or y_1, y_2, ... étant solutions de (1), les coefficients de c_1, c_2, ..., c_i sont nuls : l'équation (1) est donc satisfaite pour $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_i y_i$. C. Q. F. D.

Avant d'aller plus loin, nous établirons la proposition suivante, dont nous ferons un fréquent usage.

Théorème III. — *Si entre les fonctions y_1, y_2, ..., y_n de x et leurs dérivées, il existe une relation de la forme*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

on aura identiquement

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignant des constantes.

En effet, la formule (1) ayant lieu, il existe des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ qui ne sont pas toutes nulles et telles que

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n = 0, \\ \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \ldots + \lambda_n y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 y_1^{n-1} + \lambda_2 y_2^{n-1} + \ldots + \lambda_n y_n^{n-1} = 0; \end{cases}$$

si l'on différentie ces équations, en combinant chaque équation dérivée avec celle qui la suit, par soustraction, on trouve

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 + \ldots + \lambda_n' y_n = 0, \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \ldots + \lambda_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1' y_1^{n-2} + \lambda_2' y_2^{n-2} + \ldots + \lambda_n' y_n^{n-2} = 0. \end{cases}$$

Des équations (2) et (3) on tire

$$(4)\quad \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = \ldots = \frac{\lambda_n'}{\lambda_n},$$

et de ces dernières on conclut

$$\lambda_i' \lambda_j - \lambda_j' \lambda_i = 0;$$

divisant par λ_j^2 et intégrant, on a

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \text{const.};$$

appelant alors $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des constantes, on peut poser

$$\lambda_1 = a_1 r, \qquad \lambda_2 = a_2 r, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n = a_n r,$$

d'où l'on conclut, en vertu de (2),

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n ne satisfaisant pas à l'identité (1),

ou, ce qui revient au même, telles qu'il n'existe pas entre elles de relation linéaire et homogène à coefficients constants, nous dirons que ces intégrales forment un système d'intégrales *distinctes*. (Les Allemands disent un système fondamental.)

Théorème IV. — *Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des intégrales distinctes de l'équation linéaire sans second membre*

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ des constantes arbitraires;

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

sera l'intégrale générale de cette équation.

En effet, ce sera une intégrale, d'après ce que nous avons vu; en second lieu, cette intégrale renfermant n constantes arbitraires sera l'intégrale générale, pourvu que les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ soient *distinctes*, c'est-à-dire (p. 11) pourvu qu'on puisse les choisir de telle sorte que $y, y', \ldots, y^{n-1}$ puissent être pris égaux à des nombres donnés pour une valeur donnée x_0 de x: or, si l'on observe que

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$
$$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \ldots + c_n y'_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit que l'on ne pourra disposer de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de manière à faire prendre à $y, y', y'', \ldots$ des valeurs données, que si le déterminant $\sum \pm y_1, y'_2, \ldots, y_n^{n-1}$ est différent de zéro, c'est-à-dire que si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forment un système d'intégrales distinctes.

Remarque. — Si l'on pose

$$u_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots + \alpha_{1n} y_n,$$
$$u_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots + \alpha_{2n} y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dans lesquelles on suppose les α constants, formeront un système d'intégrales distinctes si le déterminant $\sum \pm \alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ n'est pas nul, car on a

$$\sum \pm u_1 u'_2 \ldots u_n^{n-1} = \sum \pm y_1 y'_2 \ldots y_n^{n-1} \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}.$$

III. — Abaissement des équations linéaires.

Abaisser une équation différentielle, c'est trouver une équation d'ordre moindre, dont l'intégration entraînerait celle de l'équation proposée. C'est, si l'on veut, trouver une équation d'ordre moindre, telle que les intégrales de l'équation proposée se déduisent de celles de la nouvelle équation par des opérations relativement simples.

Nous allons nous occuper de l'abaissement des équations linéaires. Pour cela, nous aurons besoin du théorème suivant :

Théorème I. — *L'expression*

$$X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y,$$

dans laquelle $X_0, X_1, \ldots, X_n$ *désignent des fonctions de la variable* x ; y *une fonction de cette variable et* $y', y'', \ldots y^{n-1}, y^n$ *les dérivées de* y *relatives à* x, *peut se représenter par la notation* $F(y)$. *Si l'on pose alors*

$$F(y) = X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y.$$
$$F'(y) = n X_0 y^{n-1} + (n-1) X_1 y^{n-2} + \ldots + X_{n-1} y.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{n-1}(y) = 2.3\ldots n X_0 y' + 1.2.3\ldots(n-1) X_1 y,$$
$$F^n(y) = 1.2.3\ldots n X_0 y;$$

on a identiquement, en remplaçant, dans $F(y)$, y *par* yz,

$$F(yz) = z F(y) + \frac{z'}{1} F'(y) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} F^n(y).$$

Cette proposition se vérifie en observant que

$$\frac{d}{dx} zy = zy' + yz',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^n(zy)}{dx^n} = zy^n + \frac{n}{1} z'y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} z''y^{n-2} + \ldots + yz^n;$$

nous appellerons dorénavant $F'(y)$, $F''(y)$, ... les dérivées symboliques de $F(y)$.

Avant d'appliquer cette formule à l'abaissement des équations linéaires, nous ferons observer que l'équation linéaire $F(y) = 0$, si l'on y change y en zy_1, devient

$$(1) \quad \frac{F^n(y_1)}{1.2.3\ldots n} z^n + \frac{F^{n-1}(y_1)}{1.2.3\ldots(n-1)} z^{n-1} + \ldots + zF(y_1) = 0;$$

si alors on choisit y_1 de telle sorte que

$$F^{n-1}(y_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad nX_0 y'_1 + X_1 y_1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y_1 = e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx},$$

l'équation (1) ne contiendra plus de terme en z^{n-1}; si l'on peut alors intégrer cette équation, on aura

$$y = z e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx},$$

et l'équation $F(y) = 0$ sera elle-même intégrée.

Théorème II. — *Lorsque l'on connaît une intégrale d'une équation différentielle linéaire sans second membre, on peut abaisser son ordre d'une unité.*

Considérons en effet l'équation

$$(1) \qquad F(y) = 0 \qquad \text{ou} \qquad X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y = 0,$$

où X_0, X_1, ... sont fonctions de x et où y', y'', ..., y^n sont

les dérivées successives de la fonction inconnue y de x. Soit y une intégrale de cette équation : posons

$$y = y_1 z;$$

l'équation (1) deviendra

$$(2)\qquad \frac{z^n F^n(y_1)}{1.2.3\ldots n} + \frac{z^{n-1} F^{n-1}(y_1)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots + z F(y_1) = 0,$$

ou, comme $F(y_1) = 0$, puisque y_1 est solution de $F(y) = 0$,

$$\frac{z^n F^n(y_1)}{1.2.3\ldots n} + \frac{z^{n-1} F^{n-1}(y_1)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots + z' F'(y_1) = 0.$$

Si alors on pose

$$z' = u \qquad \text{ou} \qquad z = \int u\,dx,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{u^{n-1} F^n(y_1)}{n!} + \frac{u^{n-2} F^{n-1}(y_1)}{(n-1)!} + \ldots + u F'(y_1) = 0$$

et ne sera plus que de l'ordre $n-1$; enfin on aura

$$y = y_1 z \qquad \text{ou} \qquad y = y_1 \int u\,dx;$$

l'intégration de $F(y)$ est donc ramenée à l'intégration d'une équation linéaire d'ordre moindre.

Remarque. — Si l'on avait $F'(y_1) = 0$, $F''(y_1) = 0$, ..., $F^i(y_1) = 0$, on pourrait évidemment abaisser l'équation de $i+1$ unités en posant $z = \int\int \ldots u\,dx^i$; d'ailleurs l'équation (2) admettrait les solutions $z = x$, $z = x^2$, ..., $z = x^i$ et par suite l'équation proposée admettrait les solutions

$$y_1, \quad y_1 x, \quad y_1 x^2, \quad \ldots, \quad y_1 x^i.$$

Théorème III. — *Lorsque l'on connaît i solutions de l'équation* $F(y) = 0$, *entre lesquelles il n'existe pas de relation linéaire à coefficients constants, on peut abaisser l'ordre de cette équation de i unités.*

En effet, soient $y_1, y_2, \ldots, y_i$ des solutions de $F(y) = 0$; on abaissera l'équation $F(y) = 0$, en posant $y = y_1 \int u\,dx$. Soit $F_{n-1}(u) = 0$ l'équation en u d'ordre $n-1$: on tire de la relation

$$y = y_1 \int u\,dx \qquad \text{la suivante} \qquad u = \frac{d}{dx}\frac{y}{y_1}$$

et par conséquent

$$(1) \qquad u_1 = \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1}$$

est une solution de $F_{n-1}(u) = 0$; on abaissera cette équation en posant

$$u = u_1 \int v\,dx$$

ou

$$v = \frac{d}{dx}\frac{u}{u_1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{u_1}\frac{d}{dx}\frac{y}{y_1},$$

et

$$(2) \qquad v_1 = \frac{d}{dx}\frac{1}{u_1}\frac{d}{dx}\frac{y_3}{y_1}$$

sera une solution de l'équation en v que l'on pourra abaisser à son tour, et ainsi de suite; mais ceci exige qu'aucune des quantités y_1, u_1, v_1, ... ne soit nulle. Or y_1 n'est pas nul; si u_1 était nul, $\frac{y_2}{y_1}$ en vertu de (1) serait constant et il existerait entre y_1 et y_2 une équation linéaire et homogène à coefficients constants. Si v_1 était nul, en vertu de (2) on aurait

$$\frac{1}{u_1}\frac{d}{dx}\frac{y_3}{y_1} = \text{const.} = a,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y_3}{y_1} = a u_1$$

et

$$\frac{y_3}{y_1} = a \int u_1\,dx = a\frac{y_2}{y_1} + b,$$

b désignant une constante; par suite,

$$y_3 = a y_2 + b y_1$$

et il y aurait une relation linéaire et homogène entre y_1, y_2, y_3, ...

Théorème IV. — *Supposons que l'on connaisse une intégrale* y_1 *de* $F(y) = 0$, *et qu'en posant* $y = y_1 \int u\,dx$ *on la transforme en* $F_{n-1}(u) = 0$, *que l'on connaisse une intégrale* u_1 *de* $F_{n-1}(u) = 0$, *et qu'en posant* $u = u_1 \int v\,dx$ *on la transforme en* $F_{n-2}(v) = 0$ *et ainsi de suite, on aura*

$$y = y_1 \int u_1\,dx \int v_1\,dx \int w_1\,dx \ldots,$$

en sorte que

$$y_1, \quad y_1 \int u_1\,dx, \quad y_1 \int u_1\,dx \int v_1\,dx, \quad \ldots$$

seront des intégrales de $F(y) = 0$: *toutes ces intégrales sont distinctes si* y_1, u_1, v_1, ... *ne sont pas nuls.*

La démonstration se fait comme la précédente : appelons y_1, y_2, y_3, ... les intégrales précédentes ; si entre y_1 et y_2 il y avait une relation homogène à coefficients constants en vertu de (1), u_1 serait nul ; de même, si l'on avait, a, b désignant des constantes, $y_3 = ay_2 + by_1$, en vertu de (2) on aurait $v_1 = 0$, ...

IV. — Relations entre les coefficients d'une équation linéaire et ses intégrales distinctes.

Quand on se donne un système d'intégrales distinctes d'une équation linéaire, on forme immédiatement son intégrale générale et par suite l'équation elle-même ; ainsi, quand on donne un système d'intégrales distinctes, l'équation est déterminée ; il doit donc exister des relations entre les coefficients et les intégrales en question : nous allons les faire connaître.

Théorème I. — *Les coefficients de l'équation linéaire*

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0 \tag{1}$$

peuvent s'exprimer au moyen de n intégrales distinctes y_1, y_2, ..., y_n.

En effet, l'intégrale générale est donnée par la formule

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

c_1, c_2, ..., c_n désignant des constantes; l'élimination de ces constantes (p. 12) entre cette équation et ses dérivées

$$\begin{array}{l} y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \ldots + c_n y'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n = c_1 y_1^n + c_2 y_2^n + \ldots + c_n y_n^n, \end{array}$$

doit fournir l'équation (1). Or la résultante est

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y' & y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^n & y_1^n & y_2^n & \ldots & y_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation devant être identique à (1), que l'on peut écrire

$$X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y = 0,$$

il faudra qu'en appelant Θ le déterminant qui figure dans (2) on ait

$$(3) \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y^n} : X_0 = \frac{\partial\Theta}{\partial y^{n-1}} : X_1 = \ldots = \frac{\partial\Theta}{\partial y} : X_n.$$

On voit en particulier que, si l'on pose

$$\Delta = \frac{\partial\Theta}{\partial y^n} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

on aura

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y'_1 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^n & \ldots & y_n^n \end{vmatrix} = \frac{\partial\Theta}{\partial y^{n-1}};$$

or on tire précisément des équations (3)

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{\partial\Theta}{\partial y^{n-1}} : \frac{\partial\Theta}{\partial y_n} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx};$$

on en déduit

$$\int \frac{X_1}{X_0}\,dx = \log\Delta$$

et, par suite,

$$\Delta = e^{\int \frac{X_1}{X_0}dx}.$$

Cette formule est due à Liouville. Δ est le déterminant qui s'annule identiquement quand les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ne sont pas distinctes. On voit qu'il s'annule aussi quand X_0 passe par zéro, ou plus exactement quand la partie réelle de l'intégrale $\int \frac{X_1}{X_0}\,dx$ est infinie et négative.

V. — Équation adjointe.

Théorème. — *Étant donnée une équation linéaire sans second membre*

(1) $$X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y = 0,$$

dans laquelle y', y'', $\ldots$, y^n désignent les dérivées de y prises par rapport à x et X_0, X_1, $\ldots$, X_n des fonctions données de x, il existe toujours un multiplicateur M, *tel que, quelle que soit la valeur attribuée à y, l'expression*

(2) $$M(X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y)$$

soit la dérivée exacte d'une certaine fonction de x, y et des dérivées y', y'', $\ldots$, y^{n-1}.

En effet, d'après ce que l'on a vu (t. III, p. 215), pour que l'expression (2) soit une dérivée, quel que soit y, il faut et il suffit que M satisfasse à l'équation différentielle linéaire sans

second membre

$$MX_n - \frac{d}{dx}(MX_{n-1}) + \frac{d^2}{dx^2}(MX_{n-2}) - \ldots = 0.$$

Il en résulte qu'il existe non seulement un, mais une infinité de multiplicateurs; la connaissance de l'un de ces multiplicateurs permettra d'abaisser l'équation proposée d'une unité.

Multiplions maintenant l'équation en M par $y\,dx$ et intégrons; nous aurons

$$\begin{aligned}
\int y\,dx\left[MX_n - \frac{d(MX_{n-1})}{dx} + \ldots\right] \\
= \int M\,dx(yX_n + y'X_{n-1} + y''X_{n-2} + \ldots) \\
- MX_{n-1}y + \frac{d(MX_{n-2})}{dx}y - MX_{n-2}y' \\
- \frac{d^2(MX_{n-3})}{dx^2}y + \frac{d(MX_{n-3})}{dx}y' - MX_{n-3}y'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

en différentiant et en supposant que y satisfait à l'équation (1), on a

$$y\left[MX_n - \frac{d(MX_{n-1})}{dx} + \ldots\right] = \frac{d\Omega}{dx},$$

Ω désignant les termes qui, dans l'équation précédente, ne sont pas sous le signe $\int$.

Il résulte de là qu'une solution de l'équation proposée (1) peut servir de facteur d'intégrabilité à l'équation du multiplicateur; il y a donc une sorte de réciprocité entre une équation linéaire et celle de son multiplicateur.

Si l'on parvient à découvrir une solution de l'équation proposée (1), on aura par cela même une solution de l'équation du multiplicateur par les quadratures; celle-ci, à son tour, permettra de trouver une solution de l'équation proposée, et ainsi de suite; mais on peut être arrêté dans la suite des calculs, parce que l'on tombe sur une solution qui n'est pas distincte de celles que l'on a déjà. L'équation du multiplicateur s'appelle quelquefois l'*adjointe* de la proposée.

VI. — Détermination des solutions communes à deux équations linéaires.

Lorsque deux équations linéaires

$$F(y) = 0, \qquad G(y) = 0,$$

dans lesquelles

$$F(y) = X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + \ldots + X_m y,$$
$$G(y) = Z_0 y^n + Z_1 y^{n-1} + \ldots + Z_n y,$$

X_i et Z_i désignant des fonctions données de x, ont des solutions communes, on peut les trouver comme il suit. Supposons $m > n$: on pourra toujours déterminer une fonction Q, telle que la différence

$$F(y) - Q\frac{d^{m-n}G}{dx^{m-n}} = G_1$$

ne renferme plus la dérivée y^m. Or toute solution commune aux équations $F = 0$, $G = 0$ annulera $F(y)$ et les dérivées de $G(y)$, par suite elle annulera G_1 ; donc les solutions communes à $F = 0$ et $G = 0$ appartiennent à deux équations dont les ordres sont moins élevés que ceux de $F = 0$ et $G = 0$ et qui sont linéaires ; et *vice versâ*, les solutions communes à $G_1 = 0$ et $G = 0$ appartiennent à $F = 0$ et $G = 0$. On procédera sur G et G_1 comme sur F et G, et ainsi de suite.

Soit G_2 une fonction déduite de G et G_1 comme G_1 l'a été de F et G, etc. ; considérons la suite $G, G_1, G_2, \ldots, G_k$. Si G_k est de la forme Hy, H étant indépendant de y, les équations $G = 0$, $F = 0$ auront la solution commune $y = 0$ seulement. Si au contraire on trouve $0 = G_k$, l'équation $G_{k-1} = 0$ aura pour solutions les solutions communes à $F = 0$ et $G = 0$.

Toutes les fois que deux équations linéaires ont une seule solution commune, cette solution peut s'obtenir par des quadratures.

En effet, cette solution doit appartenir à une équation

linéaire du premier ordre, et l'on sait que toute équation linéaire du premier ordre peut s'intégrer au moyen de simples quadratures.

On peut arriver d'une autre manière aux résultats précédents.

Représentons par $A(y)$ l'expression linéaire

$$A_0 \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + A_m y,$$

par $B(y)$ l'expression

$$B_0 \frac{d^n y}{dx^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + B_n y,$$

etc., en sorte que A, B, ... seront des symboles opératoires sur lesquels nous allons établir quelques théorèmes.

Théorème I. — *Étant données deux expressions symboliques* $A(y)$, $B(y)$ *d'ordre* m *et* n *respectivement, il est toujours possible de déterminer des expressions* Q, R, *telles que l'on ait, quel que soit* y,

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y), \tag{1}$$

Q *étant d'ordre* $m - n$ *et* R *d'ordre* $n - 1$.

En effet, $Q[B(y)]$ est de la forme

$$G_0 \frac{d^m y}{dx^m} + G_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + G_m y,$$

et l'on a

$$G_0 = Q_0 B_0,$$
$$G_1 = (m-n) Q_0 \frac{dB_0}{dx} + Q_0 B_1 + B_0 Q_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on égale les quantités $G_0, G_1, \ldots, G_{m-n}$ aux coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-n}$, on aura $m - n + 1$ équations pour déterminer $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{m-n}$, et qui seront compatibles, parce que $B_0 \gtrless 0$; sans quoi $B(y)$ ne serait pas d'ordre n; la quantité $A(y) - Q[B(y)]$ sera alors d'ordre $n - 1$: on peut la représenter par $R(y)$ et le théorème est démontré.

A est ce que l'on peut appeler le *dividende*, B le *diviseur*, Q le *quotient* et R le *reste*.

Lorsque le reste est nul, on a

$$A(y) = Q[B(y)],$$

A est alors décomposé en facteurs Q et B ; mais, en général, on n'a pas $Q(B) = B(Q)$, et les symboles linéaires ne sont pas commutatifs.

Théorème II. — *Quand deux équations différentielles linéaires*

$$A(y) = 0, \qquad B(y) = 0$$

ont une solution commune, elle appartient à une équation d'ordre moindre.

On peut en effet diviser A par B, ce qui donne

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y);$$

si $R(y)$ est nul, toute solution de $B(y) = 0$ appartient à $A(y) = 0$; sinon, toute solution commune à $A(y) = 0$ et $B(y) = 0$ appartient à $R(y) = 0$, et toute solution commune à $R(y) = 0$ et à $B(y) = 0$ appartient à $R(y) = 0$. Posant alors

$$B(y) = Q_1[R(y)] + R_1(y),$$

on est ramené à chercher les solutions communes à $R(y) = 0$ et à $R_1(y) = 0$, si $R_1(y)$ n'est pas nul, et ainsi de suite.

VII. — Équations linéaires à coefficients constants.

Quand une équation linéaire a ses coefficients constants, on l'intègre très facilement. Considérons l'équation à coefficients constants, sans second membre,

$$(1) \qquad A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots + A_0 y = 0;$$

si l'on y pose $y = e^{\alpha x}$, α désignant une constante, elle devient, après la suppression du facteur $e^{\alpha x}$,

$$(2) \qquad A_n \alpha^n + A_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + A_0 = 0.$$

Cette équation (2) est ce que l'on appelle l'équation *caractéristique :* nous la désignerons par $F(\alpha) = 0$; elle a n racines, et, si ces racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont distinctes, $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$ seront autant de solutions de (1); la solution générale de (1) sera donc (p. 120)

$$(3) \qquad y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x}.$$

D'ailleurs les constantes $c_1, c_2, \ldots$ sont distinctes, car le déterminant des dérivées des fonctions $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots$ se réduit ici, à un facteur exponentiel près, à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

qui est le produit des différences des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; ainsi, quand les racines de $F(\alpha) = 0$ seront distinctes, la formule (3) représentera l'intégrale générale de (1). Quand des racines de $F(\alpha)$ sont égales, notre procédé tombe en défaut; il fournit bien des intégrales en aussi grand nombre qu'il y a de racines distinctes, mais ces intégrales seules ne peuvent pas concourir à former l'intégrale générale. Soit α_1 une racine d'ordre de multiplicité i; on a identiquement, en remplaçant dans (1) y par $e^{\alpha x}$,

$$A_n \frac{d^n e^{\alpha x}}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} e^{\alpha x}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_0 e^{\alpha x} = F(\alpha) e^{\alpha x}.$$

Différentions $i - 1$ fois de suite par rapport à α, nous aurons

$$A_n \frac{d^n x^{i-1} e^{\alpha x}}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} x^{i-1} e^{\alpha x}}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$= [F(\alpha) x^{i-1} e^{\alpha x} + (i-1) F'(\alpha) x^{i-2} e^{\alpha x} + \ldots + F^{i-1}(\alpha) e^{\alpha x}];$$

si l'on fait alors $\alpha = \alpha_1$, le second membre est nul, à cause que α_1 est racine d'ordre i de $F(\alpha)$; il doit donc en être de même du premier, donc $x^{i-1} e^{\alpha_1 x}$ est une solution de (1). Il est clair que $x e^{\alpha_1 x}, x^2 e^{\alpha_1 x}, \ldots, x^{i-2} e^{\alpha_1 x}$ sont également des so-

lutions, ainsi qu'on l'aurait prouvé en différentiant, une, deux, etc. fois au lieu de $i-1$ fois.

Ainsi l'intégrale générale devient

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x}(1 + ax + bx^2 + \ldots + kx^{i-1}) + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots, k$ désignant des constantes.

Quand l'équation caractéristique a des racines imaginaires, si ces racines sont conjuguées, on est conduit à introduire des termes de la forme

$$C_1 e^{(p+q\sqrt{-1})x} + C_2 e^{(p-q\sqrt{-1})x}$$

dans l'expression de l'intégrale générale; mais ces termes donnent le résultat

$$(C_1 + C_2) e^{px} \cos qx + \sqrt{-1}(C_1 - C_2) e^{px} \sin qx;$$

or, les constantes C_1 et C_2 étant arbitraires, on peut poser

$$C_1 + C_2 = A \qquad \text{et} \qquad C_1 - C_2 = \frac{B}{\sqrt{-1}};$$

de cette façon, nos deux racines imaginaires $p + q\sqrt{-1}$ et $p - q\sqrt{-1}$ nous donnent les deux termes réels

$$A e^{px} \cos qx + B e^{px} \sin qx.$$

Si, d'ailleurs, on pose

$$A = \rho \cos hq, \qquad B = \rho \sin hq,$$

h et ρ désignant des constantes, l'expression précédente deviendra

$$\rho e^{px} \cos q(x - h),$$

que l'on pourrait aussi remplacer par $\rho e^{px} \sin q(x-h)$. Si l'équation caractéristique avait $2i$ racines imaginaires égales, la solution prendrait la forme

$$\begin{aligned}&\rho e^{px} \cos qx(1 + ax + bx^2 + \ldots + kx^{i-1})\\ &\quad + \rho' e^{px} \sin qx(1 + a'x + b'x^2 + \ldots + k'x^{i-1}) + \ldots\end{aligned}$$

Les équations de la forme

$$A_n(ax+b)^n y^{(n} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_0 y = 0,$$

dans lesquelles A_0, A_1, ..., a et b désignant des constantes se ramènent à la forme linéaire à coefficients constants, en posant $ax+b = ae^t$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} e^{-2t} - \frac{dy}{dt} e^{-2t}, \qquad \ldots;$$

mais on peut aussi en trouver des solutions particulières en posant $y = (ax+b)^\mu$. On obtient alors une équation analogue à l'équation caractéristique, donnant en général n valeurs de μ distinctes; quand ses racines sont égales, un artifice, analogue à celui que nous avons employé plus haut, donne la solution.

Exemples : 1° $y'' - 2y' + y = 0$. — L'équation caractéristique est

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0;$$

les racines sont égales entre elles et à 1 ; l'intégrale est donc

$$y = Ce^x(1 + ax).$$

2° $y''x^2 - y'x + y = 0$. — On posera $y = x^\mu$, on aura, en supprimant le facteur x^μ,

$$\mu(\mu - 1) - \mu + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu^2 - 2\mu + 1 = 0;$$

la solution est

$$y = Cx(1 + a \log x).$$

En posant $x = e^t$, on aurait eu

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dt^2} e^{-2t} - \frac{dy}{dt} e^{-2t},$$

et, par suite,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0,$$

dont la solution trouvée tout à l'heure est

$$y = Ce^t(1 + at)$$

ou

$$y = Cx(1 + a\log x).$$

Ainsi, quand les coefficients de l'équation linéaire sont les puissances de x et quand l'équation caractéristique a des racines égales, la solution est de la forme

$$cx^\mu(1 + a\log x + b\log^2 x + \ldots).$$

VIII. — Équations avec second membre.

Quand on a la solution générale d'une équation sans second membre $F(y) = 0$, il suffit de connaître une seule solution de l'équation avec second membre

$$(1) \qquad F(y) = f(x).$$

Pour trouver la solution générale de cette équation, si, en effet, appelant ζ la solution connue de (1), on pose $y = \zeta + y_1$, elle devient

$$F(\zeta + y_1) = f(x)$$

ou

$$F(\zeta) + F(y_1) = f(x);$$

mais, ζ étant solution de (1), on a

$$F(\zeta) = f(x),$$

et par suite

$$F(y_1) = 0;$$

si donc y_1 est la solution la plus générale de cette équation, $\zeta + y_1$ sera la solution générale de (1).

Toute la question pour la résolution des équations à coefficients constants se réduira donc à obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre. Avant de donner

une règle générale pour parvenir au résultat, nous examinerons quelques cas particuliers :

1° Si le second membre de l'équation linéaire à coefficients constants

$$F(y) = f(x) \tag{1}$$

est un polynôme entier, on satisfait ordinairement à cette équation par la méthode des coefficients indéterminés en posant

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

a, b, c. . . . désignant des constantes.

2° Si $f(x)$ est de la forme e^{ax}, on essayera la forme $y = ge^{ax}$, g désignant une constante.

3° Si $f(x)$ est une somme de sinus et de cosinus, on essayera la forme

$$y = A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x \ldots.$$

A_1, B_1, . . . désignant des coefficients constants et ainsi de suite.

Exemples : 1° $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2$. — La solution de l'équation sans second membre est

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x};$$

essayons de satisfaire à l'équation avec second membre et posons

$$y = a + bx + cx^2,$$
$$y' = b + 2cx,$$
$$y'' = 2c;$$

l'équation deviendra

$$2c - a - bx - cx^2 = x^2.$$

On y satisfait en posant $c = -1$, $b = 0$, $a = 2c = -2$; donc

$$y = -x^2 - 2 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

est la solution générale de l'équation proposée.

2° $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$. — On essayera d'y satisfaire en posant $y = me^x$: mais alors on trouve $0 = e^x$. La règle que nous avons donnée tombe en défaut; mais, si l'on résout d'abord l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^{\mu x},$$

on est conduit à poser $y = me^{\mu x}$: on a alors

$$y'' = m\mu^2 e^{\mu x} \qquad \text{et} \qquad m\mu^2 - m = 1, \qquad m = \frac{1}{\mu^2 - 1},$$

et par suite $y = \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 - 1}$ est une solution; la solution la plus générale est

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{e^{\mu x}}{\mu^2 - 1}$$

ou

$$y = \left(C_1 + \frac{1}{\mu^2 - 1}\right) e^x - C_2 e^{-x} + \frac{e^{\mu x} - e^x}{\mu^2 - 1}.$$

En posant $C_1 + \frac{1}{\mu^2 - 1} = A$, on a

$$y = A e^x + C_2 e^{-x} + \frac{e^{\mu x} - e^x}{\mu^2 - 1}.$$

Faisons tendre μ vers 1; en laissant A constant, nous aurons, pour $\mu = 1$, la solution de l'équation proposée

$$y = A e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x e^x}{2}.$$

3° $y'' + y = xe^x$. — La solution de l'équation sans second membre $y'' + y = 0$ dépend de l'équation caractéristique $\alpha^2 + 1 = 0$; d'où l'on tire

$$\alpha = \pm\sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

On essayera pour l'équation avec second membre la solution

$$y = e^x(ax + b);$$

on aura

$$y' = e^x(ax + b) + e^x a, \qquad y'' = e^x(ax + b + a) + e^x a,$$

et, par suite, l'équation proposée donnera

$$e^x(2ax + 2b + 2a) = xe^x,$$

ou, en identifiant,

$$2a = 1, \qquad 2a + 2b = 0, \qquad a = \tfrac{1}{2}, \qquad b = -\tfrac{1}{2};$$

la solution cherchée est donc

$$y = \frac{1}{2} e^x(x - 1) + A \cos x + B \sin x.$$

IX. — Méthode de la variation des constantes.

Lorsque l'on veut intégrer une équation ou un système d'équations, il y a souvent avantage à négliger certains termes : on obtient ainsi de nouvelles équations plus faciles à intégrer. Les solutions de ces nouvelles équations contiennent des constantes arbitraires, et, en remplaçant ces constantes par des fonctions indéterminées de la variable, on essaye de satisfaire aux équations proposées en déterminant convenablement ces constantes devenues variables. Cette méthode est due à Lagrange.

La méthode précédente, dite de la *variation des constantes*, s'applique avec succès à la recherche d'une solution d'équation linéaire avec second membre, quand on connaît l'intégrale générale de l'équation privée de son second membre.

Considérons l'équation linéaire

$$(1) \qquad X_n y^n + X_{n-1} y^{n-1} + \ldots + X_0 y = P$$

où X_0, X_1, ... désignent des fonctions quelconques de la variable x et où y, y', ... désignent la fonction inconnue et ses dérivées, et soit, en désignant par c_1, c_2, ..., c_n des constantes,

$$(2) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = \Sigma\, c_i y_i$$

l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$(3) \qquad X_n y^n + X_{n-1} y^{n-1} + \ldots + X_0 y = 0.$$

Nous pouvons essayer de satisfaire à (1) en remplaçant y par son expression (2), mais en substituant à $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des fonctions de x convenablement choisies. Nous les déterminerons en posant tout d'abord

$$(4) \qquad \Sigma c'_i y_i = 0, \qquad \Sigma c'_i y'_i = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma c'_i y_i^{n-2} = 0,$$

les accents indiquant comme plus haut des dérivées relatives à x. Ces $n - 1$ équations ne déterminent pas complètement les quantités c qui sont au nombre de n, mais elles simplifient l'expression des dérivées de la valeur de y tirée de (2); en effet, en différentiant cette formule, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} y' = \Sigma c_i y'_i, \qquad y'' = \Sigma c_i y''_i, \qquad y''' = \Sigma c_i y'''_i, \qquad \ldots. \\ y^n = \Sigma c_i y_i^n + \Sigma c_i y^{n-1}. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans (1), on trouve

$$\Sigma c_i (X_n y_i^n + X_{n-1} y_i^{n-1} + \ldots + X_0 y_i) + \Sigma X_n c'_i y_i^{n-1} = P;$$

mais, y_i étant solution de (3), cette formule se réduit à

$$X_n \Sigma c'_i y_i^{n-1} = P$$

ou, en posant $\frac{P}{X_n} = f(x)$,

$$\Sigma c'_i y_i^{n-1} = f(x);$$

cette formule jointe à (4) achèvera de déterminer les fonctions $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$, et de simples quadratures feront connaître $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

En résumé, pour intégrer l'équation avec second membre, il faudra prendre

$$(2) \qquad y = \Sigma c_i y_i,$$

les quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant données par les formules

$$(6) \qquad \begin{cases} \Sigma c'_i y_i = 0, \qquad \Sigma c'_i y'_i = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma c'_i y_i^{n-2} = 0, \\ \Sigma c'_i y_i^{n-1} = f(x), \qquad f(x) = \frac{P}{X_n}. \end{cases}$$

Cauchy a présenté cette solution sous diverses formes que nous allons faire connaître. Et d'abord, en remplaçant, dans (2), $c_1, c_2, \ldots$ par leurs valeurs tirées de (6), on a

$$y = \sum y_i \int_{x_0}^{x} c'_i \, dx$$

ou, si l'on désigne par γ'_i ce que devient c'_i quand on y remplace x par z,

$$y = \sum \int_{x_0}^{x} \gamma'_i y_i \, dz.$$

La limite inférieure x_0 de l'intégrale est d'ailleurs arbitraire et y s'annule pour $x = x_0$; en vertu de (5), on aura d'ailleurs

$$y^k = \sum \int_{x_0}^{x} \gamma'_i y_i^k \, dz,$$

pour les valeurs entières de l'indice k moindres que n, et l'on voit que les $n - 1$ premières dérivées de y s'annuleront encore pour $x = x_0$. Or, pour obtenir γ'_i, il suffira dans (6) de remplacer x par z : la valeur obtenue pour c'_i sera précisément γ'_i; on peut donc dire que $\sum \gamma'_i y_i$ est la valeur de $y = \varphi(z, x)$, obtenue en posant $y = \sum c_i y_i$, et en déterminant les constantes c de manière que, pour $x = z$, on ait

$$\Sigma c_i y_i = 0, \qquad \Sigma c_i y'_i = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma c_i y_i^{n-1} = f(z),$$

c'est-à-dire de manière que la solution de l'équation sans second membre satisfasse aux relations

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad \ldots, \quad y^{n-2} = 0, \quad y^{n-1} = f(z) \quad \text{pour} \quad x = z.$$

En appelant $\varphi(z, x)$ cette valeur, on a donc, pour la solution de l'équation (1),

$$y = \int_{x_0}^{x} \varphi(z, x) \, dz$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x_0, x) \, dx_0.$$

On arrive ainsi au théorème suivant :

Pour intégrer l'équation (1), *déterminons les constantes de la solution* $\Sigma c_i y_i$ *de l'équation privée de son second membre, de telle sorte que, pour* $x = x_0$, *on ait*

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad \ldots, \quad y^{n-2} = 0, \quad y^{n-1} = f(x_0).$$

Soit $\varphi(x_0, x)$ *la valeur de* y *que l'on en déduit : la formule*

$$(7) \qquad y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x_0, x)\, dx_0$$

sera l'intégrale de l'équation (1) *qui s'annule, ainsi que ses* $n - 1$ *premières dérivées, pour* $x = x_0$.

On peut vérifier cette conclusion en observant que, pour $x = x_0$, on a

$$\varphi(x_0, x_0) = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x_0} = 0, \quad \ldots;$$

en différentiant alors la formule (7), on a

$$y' = \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}\varphi(x_0, x)\, dx_0 + \varphi(x, x).$$

Or $\varphi(x_0, x_0) = 0$, quel que soit x_0; donc $\varphi(x, x) = 0$, et l'on a

$$y' = \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}\varphi(x_0, x)\, dx_0,$$

$$y'' = \int_{x_0}^{x} \frac{d^2}{dx^2}\varphi(x_0, x)\, dx_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y^n = \int_{x_0}^{x} \frac{d^n}{dx^n}\varphi(x_0, x)\, dx_0 + \left[\frac{d^{n-1}\varphi(x_0, x)}{dx_0}\right]_{x_0 = x}.$$

Si l'on observe alors que la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de $\varphi(x_0, x)$ pour $x_0 = x$ est $f(x)$, et si l'on porte les valeurs précédentes de $y, y', \ldots$ dans (1), cette équation se trouve satisfaite.

APPLICATION. — *On propose d'intégrer l'équation*

$$y'' + n^2 y = \frac{1}{x}.$$

1° *Par la méthode de Lagrange.* — On intègre l'équation privée de son second membre, et l'on trouve

$$y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx;$$

on pose ensuite

$$c'_1 \cos nx + c'_2 \sin nx = 0,$$

$$-nc'_1 \sin nx + nc'_2 \cos nx = \frac{1}{x},$$

d'où l'on tire

$$c_1 = -\int \frac{\sin nx}{nx}\, dx,$$

$$c_2 = \int \frac{\cos nx}{nx}\, dx;$$

par suite, en désignant par C_1 et C_2 deux constantes,

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + \frac{\cos nx}{n} \int \frac{\sin nx}{x}\, dx - \frac{\sin nx}{n} \int \frac{\cos nx}{x}\, dx.$$

On pourrait se dispenser d'écrire les deux premiers termes, en supposant les intégrales accompagnées de leurs constantes arbitraires.

2° *Par la méthode de Cauchy.* — On déterminera C_1 et C_2 de telle sorte que, pour $x = x_0$, on ait $y = 0$, $y' = \frac{1}{x_0}$; or on a

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx,$$

$$y' = -C_1 n \sin nx + C_2 n \cos nx;$$

donc on posera

$$0 = C_1 \cos nx_0 + C_2 \sin nx_0,$$

$$\frac{1}{x_0} = -C_1 n \sin nx_0 + C_2 n \cos nx_0$$

On en déduira

$$C_1 = -\frac{\sin n x_0}{n x_0}, \qquad C_2 = \frac{\cos n x_0}{n x_0},$$

$$y = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\cos n x_0}{n x_0} \sin n x - \frac{\sin n x_0}{n x_0} \cos n x \right) dx_0.$$

et cette solution s'annule ainsi que sa dérivée pour $x = x_0$.

X. — Théorie de Cauchy.

Cauchy a fait connaître une formule qui donne explicitement la solution d'une équation linéaire à coefficients constants : nous pouvons représenter l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = f(x),$$

dans laquelle $A_1, \ldots, A_n$ sont constants, par la notation

$$y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n y = f(x)$$

comme plus haut, ou symboliquement par

$$(1) \qquad F(y) = f(x),$$

en ayant soin de considérer dans le polynôme $F(y)$ les exposants comme des indices de dérivation. Intégrons d'abord

$$(2) \qquad F(y) = 0,$$

et pour cela posons $y = e^{\alpha x}$, l'équation caractéristique prendra la forme

$$(3) \qquad F(\alpha) = 0,$$

$F(\alpha)$ désignant ce que devient $F(y)$ quand on remplace y par α, mais les indices par de véritables exposants. On a alors

$$y = \sum c_i e^{\alpha_i x},$$

α_i désignant une racine de $F(\alpha_i) = 0$; or cette valeur de y

peut s'écrire

$$y = \mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{F(z)} F'(z) e^{zx},$$

$\varphi(z)$ étant un polynôme entier arbitraire ou, ce qui revient au même,

$$y = \mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{F(z)} e^{zx}.$$

Occupons-nous de l'équation avec second membre : à cet effet, faisons varier les constantes ; nous aurons

$$\sum c_i' e^{\alpha x} = 0, \qquad \sum c_i' \alpha e^{\alpha x} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum c_i' \alpha^{n-1} e^{\alpha x} = f(x),$$

d'où l'on conclut facilement $c_i' e^{\alpha_i x}$. A cet effet, on posera

$$\frac{F(z)}{z - \alpha_i} = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + z^{n-1};$$

on multipliera la première équation par λ_0, la seconde par λ_1 ..., et l'on ajoutera : on aura

$$c_i' e^{\alpha_i x} \left[\frac{F(z_i)}{z - \alpha_i} \right]_{z = \alpha_i} = f(x), \qquad \text{ou} \qquad c_i' e^{\alpha_i x} F'(\alpha_i) = f(x),$$

ou

$$c_i' e^{\alpha_i x} = \frac{f(x)}{F'(\alpha_i)},$$

par suite

$$c_i = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x) e^{-\alpha_i x}}{F'(\alpha_i)} dx,$$

ou encore

$$c_i = \int_{x}^{x} \frac{f(\mu) e^{-\alpha_i \mu} d\mu}{F'(\alpha_i)};$$

on a donc

$$\sum c_i e^{\alpha_i x} = \sum \int_{x_0}^{x} \frac{f(\mu) e^{\alpha_i (x - \mu)} d\mu}{F'(\alpha_i)},$$

ce que l'on peut écrire dans le cas où l'équation caractéristique n'a pas de racines multiples

$$\sum c_i e^{\alpha_i x} = \mathcal{E} \int_{x_0}^{x} \frac{f(\mu) e^{z(x - \mu)} d\mu}{F(z)}.$$

Je dis maintenant que la solution la plus générale de la question est

$$y = \mathcal{E}\frac{\varphi(z)e^{zx}}{F(z)} + \mathcal{E}\int_{x_0}^{x}\frac{f(\mu)e^{z(x-\mu)}d\mu}{F(z)},$$

lors même que l'équation caractéristique aurait des racines multiples. En effet, il est facile de constater directement que l'expression précédente contient le nombre voulu de constantes arbitraires; si l'on suppose, en effet, que α soit racine d'ordre de multiplicité m de $F(x)$, le résidu de $\frac{\varphi(z)}{F(z)}e^{zx}$ relatif à cette racine sera, en posant $F(z) = \theta(z)(z-\alpha)^m$,

$$\frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}}\frac{\varphi(\alpha)}{\theta(\alpha)}e^{\alpha x}\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

et cette expression contient, comme l'on voit, $\varphi(\alpha)$ et ses $m-1$ premières dérivées, qui sont autant de constantes arbitraires.

XI. — Recherches de M. Fuchs.

Pendant longtemps on n'a possédé sur les équations linéaires que les notions exposées précédemment; mais M. Fuchs, ayant eu l'idée d'appliquer les méthodes de Cauchy à l'étude des solutions des équations linéaires, a ouvert un champ très vaste à l'étude des géomètres; on peut reconnaître aujourd'hui si une équation linéaire a des intégrales rationnelles, algébriques, etc., et l'on peut, dans un grand nombre de cas, trouver ces solutions.

Nous ne pourrons, dans ce Chapitre, exposer que les travaux, les plus simples et en quelque sorte fondamentaux, qui ont été entrepris sur les équations linéaires. On a fait pour ces équations une étude analogue à celle qui a été entreprise pour les équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction algébrique, quand on a édifié la théorie des fonctions abéliennes, et l'on comprend que leurs intégrales constituent des transcendantes nouvelles irréductibles à celles que l'on a étudiées auparavant.

Nous ne considérerons, dans ce qui va suivre, que des équations linéaires sans second membre, puisque les autres se ramènent à celles-ci au moyen de quadratures.

Soit donc

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n y = 0$$

une équation linéaire sans second membre, dans laquelle nous supposons le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé égal à l'unité; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des fonctions données de la variable x supposées monodromes.

Pour calculer les intégrales de (1), on peut la remplacer par le système suivant d'équations du premier ordre

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy^{n-1}}{dx} + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_n y = 0, \\ \dfrac{dy^{n-2}}{dx} = y^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy}{dx} = y', \end{cases}$$

dans lequel $y', y'', \ldots, y^{n-1}$ désignent les dérivées successives de y. Faisons varier x à partir d'une valeur initiale x_0, et soient $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$ des valeurs correspondantes arbitraires attribuées à $y, y', \ldots, y^{n-1}$. D'après un théorème connu, démontré (t. III, p. 127), les fonctions $y, y', y'', \ldots$ seront développables par la formule de Maclaurin suivant les puissances ascendantes de $x - x_0$, et le rayon de convergence R de la série sera donné par la formule connue

$$(3)\qquad R = A\left(1 - e^{-\frac{1}{Mn}}\right),$$

où A est le plus petit des modules de $(x - x_0)$, $(y - y_0)$.

$(y'-y'_0)$, ... pour lesquels $p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n$ cesserait d'être synectique, et où M est le module maximum de cette fonction quand $x, y, y', y'', \ldots$ se meuvent dans des cercles de rayons A ayant leurs centres respectivement en $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots$, cette fonction $p_1 y^{(n-1)} + \ldots$ ne pouvant évidemment cesser d'être synectique qu'en un point critique de l'une des fonctions $p_1, p_2, \ldots$; A ne sera autre chose que la distance du point x_0 au point critique de l'une des fonctions $p_1, p_2, \ldots$. Les points critiques des fonctions p sont ce que l'on appelle les *points singuliers* de l'équation (1).

Si dans la formule (3) on suppose que M ait une valeur positive finie, R a toujours une valeur finie, en sorte que y existe et reste synectique autour de tout point qui n'est pas infiniment voisin d'un point singulier.

Soit maintenant a un point singulier de l'équation, c'est-à-dire un point critique de l'une des fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Faisons tourner le point x autour de ce point a : soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système d'intégrales distinctes; lorsque le point x aura achevé sa révolution et sera revenu au point de départ, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se seront transformées en d'autres $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ (qui pourront n'être pas toutes différentes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$) et, comme les nouvelles valeurs en question sont toujours des intégrales de l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned} y'_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots + \alpha_{1n} y_n, \\ y'_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots + \alpha_{2n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n &= \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \ldots + \alpha_{nn} y_n, \end{aligned}$$

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nn}$ désignant des constantes.

Il est facile de voir que *les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ restent distinctes quand elles se sont transformées en $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$.*

En effet, on a vu (p. 127) que le déterminant

$$\Delta = \sum \pm y_1, y'_2, y''_3, \ldots, y^{n-1}_n$$

était donné par la formule de Liouville

$$\Delta = e^{\int p_1 dx};$$

or, p_1 étant monodrome, $\int p_1 dx$ est de la forme

$$\log(x-a)^\alpha + \psi(x).$$

et Δ de la forme $(x-a)^\alpha \theta(x)$, $\theta(x)$ étant monodrome; donc Δ se reproduit multiplié par un facteur qui n'est pas nul, après une rotation de x autour de a; s'il n'était pas nul avant la rotation, il ne sera pas nul après.

C. Q. F. D.

XII. — Équation fondamentale.

Théorème. — *On peut toujours trouver un système c_1, c_2, ..., c_n de constantes telles, que la valeur de y*

(5) $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

se transforme en une autre y' liée à y par une équation de la forme

(6) $$y' = y\omega,$$

ω désignant une constante, après une rotation de x autour du point singulier a.

En effet, quand x a effectué une rotation autour de a, y_1, y_2, ..., y_n se sont changés en y'_1, y'_2, ..., y'_n, et l'on a vu que

$$y'_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots + \alpha_{1n} y_n,$$
$$y'_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots + \alpha_{2n} y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on a en outre, au lieu de l'équation (5),

$$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \ldots + c_n y'_n$$

ou, en vertu des équations précédentes,

$$y' = y_1(\alpha_{11} c_1 + \alpha_{21} c_2 + \ldots) + y_2(\alpha_{12} c_1 + \alpha_{22} c_2 + \ldots) + \ldots;$$

pour que l'on ait $y' = \omega y$, il suffit de déterminer $c_1, c_2, \ldots,$ ω au moyen des équations

(7) $$\left\{\begin{array}{l} (\alpha_{11} - \omega)c_1 + \alpha_{21}c_2 + \ldots + \alpha_{n1}c_n = 0, \\ \alpha_{12}c_1 + (\alpha_{22} - \omega)c_2 + \ldots + \alpha_{n2}c_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \omega)c_n = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination des c donne l'équation

(8) $$\Omega = 0,$$

dans laquelle

$$\Omega = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Cette équation est l'*équation fondamentale*, Ω est la *fonction fondamentale*. Lorsque l'on aura résolu l'équation $\Omega = 0$ qui est de degré n, on en déduira n valeurs de ω et n systèmes de valeurs correspondantes pour les constantes c ; n intégrales jouiront alors de la propriété exprimée par l'équation (6). Il convient maintenant de soumettre l'équation $\Omega = 0$ à une discussion approfondie.

L'équation $\Omega = 0$ *n'a ni racine nulle ni racine infinie.*

En effet, le coefficient de ω^n est $(-1)^n$; quant au terme indépendant de ω dans Ω, il est égal au déterminant

$$\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn},$$

qui, on l'a vu (p. 121), n'est pas nul. Mais l'équation en question peut avoir des racines multiples.

Les racines de l'équation $\Omega = 0$, *et par suite les coefficients de cette équation, sont des invariants; ils ne dépendent pas du choix que l'on a fait du système d'intégrales distinctes* $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Ω est, en effet, le déterminant des fonctions linéaires

$$(\alpha_{11}-\omega)y_1+\alpha_{21}y_2+\ldots+\alpha_{n1}y_n,$$
$$\alpha_{22}y_1+(\alpha_{22}-\omega)y_2+\ldots+\alpha_{n2}y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

si aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on en substitue d'autres z_1, $z_2, \ldots, z_n$, fonctions linéaires et homogènes de celles-ci, la nouvelle valeur de Ω sera égale à l'ancienne, à un facteur près, ce qui démontre la proposition énoncée.

Supposons maintenant que l'équation $\Omega=0$ ait toutes ses racines distinctes : appelons-les $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, on aura alors n intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, donnant lieu à des équations

$$y'_1=\omega_1 y_1, \qquad y'_2=\omega_2 y_2, \qquad \ldots, \qquad y'_n=\omega_n y_n;$$

ces intégrales seront distinctes.

En effet, s'il existait entre les y une relation de la forme

$$a_1 y_1+a_2 y_2+\ldots+a_n y_n=0,$$

$a_1, a_2, \ldots$ désignant des constantes, en faisant tourner le point x autour du point singulier, on aurait successivement

$$a_1\omega_1 y_1+a_2\omega_2 y_2+\ldots+a_n\omega_n y_n=0,$$
$$a_1\omega_1^2 y_1+a_2\omega_2^2 y_2+\ldots+a_n\omega_n^2 y_n=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on conclurait

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \ldots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}=0,$$

ce qui ne saurait avoir lieu si $\Omega=0$ n'a pas de racines égales.

Maintenant posons $\omega_1=e^{2\pi\sqrt{-1}k_1}$; on aura

$$y'_1=y_1 e^{2\pi\sqrt{-1}k_1},$$

et, si l'on considère la fonction $y_1(x-a)^{-k_1}$, elle se changera

par une rotation du point x autour du point singulier a en elle-même ; cette fonction est donc monodrome, et, en la désignant par φ_1, on aura

$$y_1 = \varphi_1(x-a)^{k_1};$$

les intégrales de l'équation (1) *peuvent donc se mettre, dans le voisinage du point* a, *sous les formes*

$$\varphi_1(x-a)^{k_1}, \quad \varphi_2(x-a)^{k_2}, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x-a)^{k_n};$$

ces intégrales sont distinctes et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *sont monodromes autour du point* a.

XIII. — Cas où l'équation fondamentale a des racines égales.

On a vu (p. 8) que les intégrales des équations différentielles sont des fonctions continues des paramètres contenus dans ces équations et que ces fonctions ont des dérivées bien déterminées, sauf en des points singuliers.

Imaginons que les coefficients de l'équation (1) renferment des paramètres variables, et que l'équation $\Omega = 0$ ait toutes ses racines inégales pour des valeurs quelconques de ces paramètres, mais que ω_1 devienne racine multiple de $\Omega = 0$, pour des valeurs particulières de ces paramètres.

Les paramètres étant quelconques, l'équation (1) aura n intégrales distinctes qui, dans le voisinage de a, seront de la forme

$$(x-a)^{k_1}\varphi_1, \quad (x-a)^{k_2}\varphi_2, \quad \ldots.$$

Faisons varier les paramètres de manière que ω_2 tende vers ω_1 et, par suite, k_2 vers k_1 : on pourra remplacer l'intégrale $(x-a)^{k_2}\varphi_2$ par la suivante

$$\frac{(x-a)^{k_2}\varphi_2 - (x-a)^{k_1}\varphi_1}{k_2 - k_1} = \frac{\Delta(x-a)^{k_1}\varphi_1}{\Delta k_1};$$

la limite de cette expression est

$$\frac{\partial}{\partial k_1}[(x-a)^{k_1}\varphi_1]:$$

l'intégrale qui disparaît par l'hypothèse $k_2 = k_1$ se trouve alors remplacée par l'expression précédente, ou

$$(x-a)^{k_1}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial k_1}+\varphi_1\log(x-a)\right].$$

Si trois valeurs de k devenaient égales à k_1, on adjoindrait aux deux intégrales

$$\varphi_1(x-a)^{k_1} \quad \text{et} \quad (x-a)^{k_1}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial k_1}+\varphi_1\log(x-a)\right]$$

la suivante

$$\lim\frac{\Delta^2\varphi_1(x-a)^{k_1}}{\Delta^2 k_1}$$

ou

$$(x-a)^{k_1}\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial k_1^2}+2\frac{\partial\varphi_1}{\partial k_1}\log(x-a)+\varphi_1\log^2(x-a)\right];$$

et ainsi de suite. Il résulte de là que :

Dans le voisinage du point singulier a, pour lequel μ racines de $\Omega = 0$ sont égales, on a μ intégrales distinctes de l'équation (1) *qui sont de la forme*

$$(x-a)^k[\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\ldots+\varphi_\mu\log^\mu(x-a)],$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ *désignant des fonctions monodromes en a.*

Remarque. — Si l'équation (1) a une intégrale de la forme

$$(x-a)^k[\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\varphi_2\log^2(x-a)+\ldots+\varphi_\mu\log^\mu(x-a)],$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ étant monodromes en a, elle a aussi pour intégrale $\varphi_\mu(x-a)^k$, car a est alors un point singulier et elle a une intégrale de la forme $\varphi(x-a)^k$, et, comme l'équation $\Omega = 0$ a une racine d'ordre μ, il y aura une solution de la forme ci-dessus dans laquelle φ_μ sera égal à φ.

XIV. — Démonstration d'un lemme.

Soient $\varphi_{0,1}, \ldots, \varphi_{ij}, \ldots$ des fonctions de x qui n'ont pas le point a pour point critique, $c_1, c_2, \ldots$ des constantes,

k_1, k_2, ... des exposants dont les différences ne sont ni nulles ni entières, la formule suivante ne saurait avoir lieu, quel que soit x,

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} c_1(x-a)^{k_1}[\varphi_{01}+\varphi_{11}\log(x-a)+\ldots+\varphi_{\alpha 1}\log^{\alpha}(x-a)] \\ +c_2(x-a)^{k_2}[\varphi_{02}+\varphi_{12}\log(x-a)+\ldots+\varphi_{\beta 2}\log^{\beta}(x-a)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +c_h(x-a)^{k_h}[\varphi_{0h}+\varphi_{1h}\log(x-a)+\ldots+\varphi_{\gamma h}\log^{\gamma}(x-a)]=0. \end{array}\right.$$

En effet, faisons tourner le point x h fois autour du point a; après chaque révolution, l'équation précédente sera encore satisfaite, et, si les constantes c ne sont pas toutes nulles, il faudra que le déterminant de leurs coefficients dans les équations dans lesquelles se transformera l'équation précédente soit nul; or, à un facteur près de la forme $(x-a)^{\mu}$, ce déterminant est un polynôme entier en $\log(x-a)$ dont les coefficients sont finis pour $x=a$, et dont le coefficient de la plus haute puissance de $\log(x-a)$ n'est pas nul : le déterminant en question ne saurait donc être nul et la formule (a) ne saurait être identique.

C. Q. F. D.

XV. — Intégrales régulières.

Une intégrale *régulière* en a est une intégrale de la forme

$$\begin{array}{l} c_1(x-a)^{k_1}[\varphi_{01}+\varphi_{11}\log(x-a)+\varphi_{12}\log^2(x-a)+\ldots] \\ +c_2(x-a)^{k_2}[\varphi_{02}+\varphi_{12}\log(x-a)+\varphi_{22}\log^2(x-a)+\ldots] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

dans laquelle c_0, c_1, ... sont des constantes et φ_{01}, φ_{11}, ... des fonctions monodromes qui n'ont pas le point a pour point essentiel; on peut alors supposer les exposants k_1, k_2, ... tels que les fonctions φ_{10}, φ_{11}, ... ne soient pas infinies pour $x=a$ et, par suite, que le point a ne soit même pas pour elles un point critique.

Nous dirons qu'une intégrale est *régulière* pour le point à l'infini, quand, en y remplaçant x par $\frac{1}{x}$, elle est pour le

point o régulière par rapport à l'équation transformée obtenue en remplaçant dans la proposée x par $\frac{1}{x}$.

L'intégrale
$$(x-a)^k[\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\ldots],$$
dans laquelle φ_0, φ_1, ... ne sont plus infinis, ni tous nuls pour $x=a$, est dite *appartenir à l'exposant k*. Nous supposerons dans la suite que les coefficients p_1, p_2, ... de l'équation différentielle n'ont pas de points essentiels et qu'ils sont monodromes : leurs seuls points critiques seront donc des pôles, c'est-à-dire des infinis d'ordre entier et fini au point a; on aura donc
$$p_i=\frac{P_i}{(x-a)^{\alpha_i}},$$
P_i désignant une fonction monodrome, monogène, finie et continue dans le voisinage de a, et différente de zéro pour $x=a$, et α_i désignant un exposant entier et positif.

Nous allons maintenant chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire ait ses intégrales régulières.

En premier lieu, l'équation
$$\frac{dy}{dx}=p_1y$$
a pour intégrale
$$y=e^{\int p_1dx};$$
si l'on met p_1 sous la forme
$$p_1=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\ldots+\theta(x-a),$$
θ ne devenant plus infini pour $x=a$, on voit que y est de la forme
$$y=\psi(x)(x-a)^A e^{-\frac{B}{(x-a)}+\cdots},$$
$\psi(x)$ désignant une fonction synectique en a. Cette intégrale sera régulière si p_1 est de la forme $\frac{P_1}{x-a}$, P_1 étant fini pour $x=a$.

En général, soit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

une équation qui ait ses intégrales régulières en a; p_1, p_2, ... étant censés monodromes en a et sans points essentiels. Si elle admet les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, on aura, en dénotant les dérivées à la manière de Lagrange,

$$\begin{aligned} &y_1^n + p_1 y_1^{n-1} + \ldots + p_n y_1 = 0, \\ &y_2^n + p_1 y_2^{n-1} + \ldots + p_n y_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad -p_i = \frac{\begin{vmatrix} y_1^{n-1} & \ldots & y_1^{i+1} & y_1^{(n)} & y_1^{i-1} & \ldots & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{n-1} & \ldots & y_n^{i+1} & y_n^{n} & y_n^{i-1} & \ldots & y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{n-1} & \ldots & y_1^{i} & \ldots & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{n-1} & \ldots & y_n^{i} & \ldots & y_n \end{vmatrix}}.$$

Les déterminants qui servent de numérateur et de dénominateur à p_i sont multipliés par des constantes quand x tourne autour du point a; car cette rotation produit sur les variables cogrédientes $y_1, y_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots, y''_1, y''_2, \ldots$ une substitution linéaire; les déterminants en question sont donc de la forme $(x-a)^{\mu}\psi(x)$ et $(x-a)^{\mu_1}\psi_1(x)$, $\psi(x)$ et $\psi_1(x)$ désignant des fonctions monodromes sans points essentiels en a et, par conséquent, si l'on veut, ne devenant pas infinies pour $x = a$.

Mais les fonctions $y_1, y_2, \ldots$ sont de la forme

$$y_i = (x-a)^{k_i}[\varphi_{0i} + \varphi_{1i}\log(x-a) + \ldots];$$

si on les substitue dans les déterminants qui figurent dans l'expression (1) de p_i, les termes logarithmiques doivent disparaître; on peut donc en faire abstraction en estimant l'ordre infinitésimal de p_i; à ce point de vue, on voit que le numé-

rateur et le dénominateur de p_i ne différant que par une colonne, p_i sera d'ordre i, et, par suite, on aura

$$p_i = \frac{P_i}{(x-a)^i},$$

P_i désignant une fonction qui ne devient pas infinie pour $x = a$. Ainsi :

Une équation linéaire qui a toutes ses intégrales régulières en a est de la forme

$$(2)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1}{x-a}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{P_2}{(x-a)^2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{P_n y}{(x-a)^n} = 0,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ *désignant des fonctions pour lesquelles le point a n'est pas critique.*

XVI. — Équations dont les intégrales sont régulières.

Considérons l'équation

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1}{x}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{P_2}{x^2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{P_n}{x^n} = 0.$$

dans laquelle $P_1, P_2, \ldots$ sont monodromes et monogènes autour de l'origine; nous allons voir que, si l'origine n'est pas un point critique pour ces fonctions, l'équation (1) a toutes ses intégrales régulières à l'origine.

Soient

$$(2)\quad \begin{cases} P_1 = b_{01} + b_{11}x + b_{21}x^2 + \ldots, \\ P_2 = b_{02} + b_{12}x + b_{22}x^2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Posons

$$(3)\quad y = c_0 x^{\alpha} + c_1 x^{\alpha+1} + c_2 x^{\alpha+2} + \ldots$$

et, sans nous inquiéter pour le moment de la question de convergence, essayons de satisfaire à (1) en déterminant convenablement $c_0, c_1, c_2, \ldots$ et α. En portant dans (1) à la place de $P_1, P_2, \ldots$ et de y leurs valeurs (2), (3), on a,

en faisant usage de la notation A^n_m pour désigner le produit $m(m-1)\ldots(m-n+1)$,

$$
\begin{aligned}
&A^n_\alpha c_0 x^{\alpha-n} + A^n_{\alpha+1} c_1 x^{\alpha-n+1} + A^n_{\alpha+2} c_2 x^{\alpha-n+2} + \ldots \\
&\quad + (A^{n-1}_\alpha c_0 x^{\alpha-n+1} + A^{n-1}_{\alpha+1} c_1 x^{\alpha-n} + \ldots)\left(\frac{b_{01}}{x} + b_{11} + b_{21} x + \ldots\right) \\
&\quad + (A^{n-2}_\alpha c_0 x^{\alpha-n+2} + A^{n-2}_{\alpha+1} c_1 x^{\alpha-n+1} + \ldots)\left(\frac{b_{02}}{x^2} + \frac{b_{12}}{x} + b_{22} + \ldots\right) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0;
\end{aligned}
$$

en divisant par $x^{\alpha-n}$, on peut encore écrire

$$
\left\{
\begin{aligned}
&A^n_\alpha c_0 + A^n_{\alpha+1} c_1 x + A^n_{\alpha+2} c_2 x^2 + \ldots \\
&\quad + (A^{n-1}_\alpha c_0 + A^{n-1}_{\alpha+1} c_1 x + A^{n-1}_{\alpha+2} c_2 x^2 + \ldots)(b_{01} + b_{11} x + b_{21} x^2 + \ldots) \\
&\quad + (A^{n-2}_\alpha c_0 + A^{n-2}_{\alpha+1} c_1 x + A^{n-2}_{\alpha+2} c_2 x^2 + \ldots)(b_{02} + b_{12} x + b_{22} x^2 + \ldots) \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

En égalant les coefficients des diverses puissances de x à o, on a

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&c_0(A^n_\alpha + A^{n-1}_\alpha b_{01} + A^{n-2}_\alpha b_{02} + \ldots) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
\right.
$$

ces équations (5) sont linéaires et homogènes en $c_0, c_1, c_2, \ldots$; la première contient c_0, la seconde contient c_0 et c_1, la suivante $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Si donc on veut que $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ne soient pas nuls, il faudra déterminer α au moyen de l'équation

$$
(6) \qquad A^n_\alpha + A^{n-1}_\alpha b_{01} + \ldots + b_{0n} = 0,
$$

laquelle est de degré n et fournit n valeurs de α, égales ou inégales; ces valeurs ne sont pas infinies, puisque le coefficient de α^n est égal à un. Si l'on choisit c_0 arbitrairement, $\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0}, \cdots$ seront alors déterminés de proche en proche par les équations (5).

Il faut remarquer que le coefficient de c_1 dans la seconde équation (5) se déduit du premier membre de (6), en changeant α en $\alpha+1$, ..., en sorte que les équations (5) seront compatibles si, α étant racine de (6), $\alpha+1, \alpha+2, \ldots$ ne sont pas racines de cette équation. Nous le supposerons.

Alors c_0, c_1, ... pourront être déterminés de manière que la valeur (3) de y satisfasse à l'équation (1). Mais nos conclusions supposent essentiellement la série (3) convergente : nous allons voir qu'elle l'est effectivement pour des valeurs suffisamment petites du module de x.

Remplaçons dans P_1, P_2, ... les coefficients de x, x^2, x^3, ... par leur module maximum B pris en signe contraire: les modules de c_0 : c_1 : c_2 : ... ne pourront que croître (le module maximum B ne sera d'ailleurs pas infini, car on peut toujours supposer les rayons de convergence des séries P_1, P_2, ... plus grands que 1; s'ils ne l'étaient pas, un simple changement de x en hx amènerait cette circonstance, et l'on raisonnerait sur l'équation ainsi transformée); les équations (4) sont alors remplacées par les suivantes, où l'on peut supposer $\operatorname{mod} x < 1$,

$$\begin{aligned} &A_\alpha^n c_0 + A_{\alpha+1}^n c_1 x + A_{\alpha+2}^n c_2 x^2 + \dots \\ &\quad + (A_\alpha^{n-1} c_0 + A_{\alpha+1}^{n-1} c_1 x + A_{\alpha+2}^{n-1} c_2 x^2 + \dots)\left(b_{01} + \frac{Bx}{1-x}\right) \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0 \end{aligned}$$

Si l'on multiplie par $1 - x$, cette équation devient

$$\begin{aligned} &(A_\alpha^n c_0 + A_{\alpha+1}^n c_1 x + \dots)(1 - x) \\ &\quad + (A_\alpha^{n-1} c_0 + A_{\alpha+1}^{n-1} c_1 x + \dots)(b_{01} + \overline{B + b_{01}}\, x) \\ &\quad + (A_\alpha^{n-1} c_0 + A_{\alpha+1}^{n-1} c_1 x + \dots)(b_{02} + \overline{B + b_{02}}\, x) \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0; \end{aligned}$$

en identifiant, on a

$$\begin{aligned} &c_{p+1}(A_{\alpha+p}^n + b_{01} A_{\alpha+p}^{n-1} + b_{02} A_{\alpha+p}^{n-2} + \dots) \\ &\quad = c_p(A_{\alpha+p-1}^n + \overline{B + b_{01}}\, A_{\alpha+p-1}^{n-1} + \overline{B + b_{02}}\, A_{\alpha+p-1}^{n-2} + \dots); \end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= A_\alpha^n + b_{01} A_\alpha^{n-1} + b_{02} A_\alpha^{n-2} + \dots, \\ F(\alpha) &= A_{\alpha-1}^{n-1} + A_{\alpha-1}^{n-2} + \dots, \end{aligned}$$

on a

$$c_{p+1} f(\alpha + p) = c_p [f(\alpha + p - 1) + BF(\alpha + p - 1)];$$

on en tire

$$\frac{c_{p+1}}{c_p} = \frac{f(\alpha+p+1)+\mathrm{B}\,\mathrm{F}(\alpha+p+1)}{f(\alpha+p)}.$$

Or $f(\alpha)$ et $\mathrm{F}(\alpha)$ sont des polynômes de degrés n et $n+1$: quand leurs arguments $\alpha+p$ et $\alpha+p+1$ deviennent infinis, $\frac{c_{p+1}}{c_p}$ tend vers l'unité : la série dans laquelle se développe y quand on a changé x en hx a donc pour rayon de convergence une ligne au moins égale à l'unité. L'équation (1) admet donc une intégrale régulière à l'origine. Si $f(\alpha)=0$ a des racines à différences entières, il faudra que α soit la plus grande de ces racines, afin que $f(\alpha+1)$, $f(\alpha+2)$, ... ne soient pas nuls; si l'on effectue le changement de x en $x-a$, on peut énoncer le théorème suivant :

Si $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ *sont des fonctions synectiques autour du point a, l'équation*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\mathrm{P}_1}{x-a}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{P}_n}{(x-a)^n} = 0$$

a au moins une intégrale régulière autour du point a.

XVII. — Continuation du même sujet.

Nous venons de voir que l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\mathrm{P}_1}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{P}_n}{x^n}y = 0$$

a une intégrale régulière à l'origine; désignons par y_1 cette intégrale, et essayons d'abaisser l'équation (1). On pose pour cela

$$y = y_1 \int u\,dx;$$

u se trouve alors être égal à $\frac{d}{dx}\frac{y}{y_1}$, et, si u a une forme régu-

lière, la valeur correspondante de y sera régulière. D'ailleurs u est donné par l'équation

$$(2)\qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{Q_1}{xy_1}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{Q_n}{x^n y_1}u = 0,$$

Q_1, Q_2, ... désignant des fonctions synectiques autour de l'origine; mais le coefficient c_0 dans y_1 est différent de zéro; l'équation (2) est donc de même forme que (1), et elle a une intégrale régulière y_2; on l'abaissera comme (1), et, en continuant ainsi, on voit que (1) a toutes ses intégrales régulières. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y$$

ait toutes ses intégrales régulières en a, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$p_1 = \frac{P_1}{x-a}, \qquad p_2 = \frac{P_2}{(x-a)^2}, \quad \dots, \qquad p_n = \frac{P_n}{(x-a)^n},$$

P_1, P_2, ... *désignant des fonctions synectiques autour du point* a.

Pour qu'elle ait partout ses intégrales régulières il faut alors que

$$p_1 = \frac{P_1}{\psi(x)}, \qquad p_2 = \frac{P_2}{[\psi(x)]^2}, \qquad \dots,$$

$\psi(x)$ désignant une fonction de la forme $(x-a)(x-b)\dots$ lorsque le point à l'infini n'est plus critique et P_1, P_2, ... désignant des fonctions partout synectiques.

XVIII. — Intégration des équations à intégrales régulières.

Soient

$$P_1 = b_{01} + b_{11}(x-a) + b_{21}(x-a)^2 + \dots,$$
$$P_2 = b_{02} + b_{12}(x-a) + b_{22}(x-a)^2 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

a, b_i désignant des constantes : considérons l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1}{x-a}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{P_n}{(x-a)^n}y = 0\,;$$

pour intégrer cette équation, on posera

$$y = c_0(x-a)^\alpha + c_1(x-a)^{\alpha+1} + c_2(x-a)^{\alpha+2} + \ldots$$

L'équation (1) deviendra alors, en divisant par $(x-a)^{\alpha-n}$,

$$\begin{aligned} &A_\alpha^n c_0 + A_{\alpha+1}^n c_1(x-a) + A_{\alpha+2}^n c_2(x-a)^2 + \ldots \\ &+ \left[A_\alpha^{n-1}c_0 + A_{\alpha+1}^{n-1}c_1(x-a) + \ldots\right]\left[b_{01} + b_{11}(x-a) + \ldots\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{aligned}$$

où A_α^n est le nombre des arrangements de α objets pris n à n ; en égalant alors à zéro les diverses puissances de $x-a$, on a des équations qui feront connaître α, c_0, c_1, c_2, ... La constante c_0 est arbitraire, et α est déterminé par l'équation suivante, obtenue en égalant à zéro le terme indépendant de $x-a$,

$$A_\alpha^n + A_\alpha^{n-1}b_{01} + A_\alpha^{n-2}b_{02} + \ldots = 0$$

ou, en appelant $f(\alpha)$ le premier membre,

$$f(\alpha) = 0.$$

Cette équation a reçu de M. Fuchs le nom d'*équation fondamentale déterminante*. Nous allons en faire connaître les propriétés :

Théorème I. — *Les racines de l'équation fondamentale déterminante sont égales aux logarithmes des racines de l'équation fondamentale divisées par* $2\pi\sqrt{-1}$.

En effet, nous avons vu que, si $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_1}$, $e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_2}$, ... étaient les racines de l'équation fondamentale, n intégrales distinctes se mettaient sous la forme

$$\varphi_1(x-a)^{\alpha_1},\quad \varphi_2(x-a)^{\alpha_2},\quad \ldots,$$

et l'équation déterminante a précisément pour objet de déterminer α_1, α_2, ...

Théorème II. — *Si dans l'équation proposée* (1) *on pose*

$$y = u(x-a)^{\alpha},$$

elle prend la forme

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{Q_1}{x-a}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{Q_n}{(x-a)^n}u = 0.$$

et, quand on fait $x = a$ dans Q_n, $Q_n(a)$ devient précisément le premier membre de l'équation déterminante.

En effet, on trouve

$$Q_n = A_{\alpha}^{n} + A_{\alpha}^{n-1}P_1 + A_{\alpha}^{n-2}P_2 + \ldots + P_n$$

et par suite on a

$$Q_n(a) = A_{\alpha}^{n} + A_{\alpha}^{n-1}b_{01} + A_{\alpha}^{n-2}b_{02} + \ldots = f(\alpha).$$

C. Q. F. D.

Il nous est impossible, dans ce Traité, de tirer des théories précédentes toutes les conclusions que l'on en a déduites : bornons-nous à faire observer que, si une équation de la forme (1) a une intégrale rationnelle, on pourra la découvrir : les équations déterminantes auront alors une racine entière, et, en multipliant les solutions par $x - a$ élevé à une puissance convenable, le point a cessera d'être critique pour une intégrale; on pourra ainsi, par des multiplications, par des binômes convenables, rendre une intégrale entière; d'ailleurs la méthode des coefficients indéterminés fera connaître la solution.

XIX. — Équations linéaires à coefficients périodiques.

Si les coefficients d'une équation linéaire sont périodiques et ont pour période ω, cette équation ne change pas quand on change x en $x + \omega$. Soient n l'ordre de cette équation, c_1, c_2, ..., c_n des constantes arbitraires : l'intégrale générale se présentera sous la forme

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x);$$

$f_1, f_2, \ldots$ désignant des intégrales particulières, mais distinctes; mais, m désignant un entier, si $f_1(x)$ est une intégrale, $f_1(x+m\omega)$ sera encore une intégrale, et, par suite, on aura

$$f_1(x+m\omega) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x);$$

et l'on pourra écrire

$$\begin{aligned} f_1(x+\omega) &= c_{11} f_1(x) + c_{12} f_2(x) + \ldots + c_{1n} f_n(x), \\ f_1(x+2\omega) &= c_{21} f_1(x) + c_{22} f_2(x) + \ldots + c_{2n} f_n(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1(x+n\omega) &= c_{n1} f_1(x) + c_{n2} f_2(x) + \ldots + c_{nn} f_n(x), \end{aligned}$$

$c_{11}, c_{12}, \ldots$ désignant des constantes. On en tire

$$(1)\quad f_1(x) = A_1 f_1(x+\omega) + A_2 f_1(x+2\omega) + \ldots + A_n f_1(x+n\omega),$$

$A_1, A_2, \ldots$ désignant des constantes. Cette conclusion serait en défaut si l'on avait $\sum \pm c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn} = 0$; mais alors il y aurait une relation linéaire entre $f_1(x), \ldots, f_n(x)$.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$(2)\quad f(x) = G_0 f_1(x) + G_1 f_1(x+\omega) + \ldots + G_{n-1} f_1(x+\overline{n-1}\,\omega),$$

dans laquelle $G_{n-1}, G_{n-2}, \ldots$ peuvent être nuls s'il y a une relation linéaire entre les $f_1(x+\nu\omega)$: on aura

$$f(x+\omega) = G_0 f_1(x+\omega) + G_1 f_1(x+2\omega) + \ldots + G_{n-1} f_1(x+n\omega)$$

mais, en vertu de (1), la formule (2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(x+\omega)(G_1+G_0A_1) &+ \ldots \\ &+ f_1(x+\overline{n-1}\,\omega)(G_{n-1}+G_0A_{n-1}) + G_0A_n f_1(x+n\omega). \end{aligned}$$

Si l'on pose alors, en appelant g une constante,

$$f(x+\omega) = g f(x),$$

on aura, pour déterminer $G_0, G_1, \ldots$ et g, les formules

$$G_0 = g(G_1 + G_0A_1), \qquad G_1 = g(G_2 + G_0A_2), \qquad \ldots$$

ou

$$\frac{1}{g} = \frac{G_1 - G_0 A_1}{G_0} = \frac{G_2 - G_0 A_2}{G_1} = \ldots = \frac{G_0 A_n}{G_{n-1}};$$

ces équations détermineront g et les rapports $G_0 : G_1 : \ldots :$ ainsi, *étant donnée une équation à coefficients périodiques, il existe une intégrale $f(x)$ telle que*

$$(3) \qquad f(x+\omega) = g f(x),$$

g désignant une constante et ω la période.

Si les coefficients étaient doublement périodiques et aux périodes ω, ϖ, on aurait également une relation de la forme

$$(4) \qquad f(x+\varpi) = h f(x),$$

h désignant encore une constante.

Ce résultat a été établi, pour la première fois, par M. Picard (*Journal de Crelle*, t. 90); il a en outre démontré que *l'on pouvait former un système distinct d'intégrales jouissant de toutes les propriétés exprimées par les formules* (3) *et* (4). Pour établir cette proposition, il suffit, étant admise l'existence de la fonction $f(x)$, de remplacer la fonction inconnue y par

$$y = f(x) \int z\, dx;$$

l'équation en z sera encore à coefficients doublement périodiques et aura aussi une intégrale $f_1(x)$ jouissant des propriétés (3), (4); d'où l'on conclut pour y la valeur

$$f(x) \int f_1(x)\, dx,$$

qui devient, en changeant x en $x+\omega$,

$$f(x) g \int f_1(x) g_1\, dx = g g_1 f(x) \int f_1(x)\, dx,$$

et ainsi de suite.

Pour intégrer l'équation, lorsque ses intégrales sont mono-

dromes et sans points essentiels, on peut procéder comme il suit :

M. Hermite désigne sous le nom de *fonctions doublement périodiques de seconde espèce* les fonctions qui se trouvent multipliées par un facteur constant quand on augmente la variable de périodes ω ou ϖ; il réserve le nom de *fonctions doublement périodiques de troisième espèce* à celles qui, par l'addition des périodes à la variable, se trouvent, comme les fonctions auxiliaires de la théorie des fonctions elliptiques, multipliées par une exponentielle à exposant linéaire; les fonctions de première espèce sont alors les fonctions doublement périodiques ordinaires.

Cherchons d'abord l'expression générale des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, monodromes et sans points essentiels.

Appelons $2\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ les périodes : il s'agit de trouver une fonction $\mathrm{F}(x)$, monodrome et sans points essentiels, satisfaisant à la fois aux deux équations suivantes, μ et μ' désignant des constantes,

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x+2\mathrm{K}) = \mu\,\mathrm{F}(x), \qquad \mathrm{F}\left(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right) = \mu'\,\mathrm{F}(x).$$

Posons

$$(2) \qquad f(x) = \frac{\mathrm{H}(x+\alpha)}{\mathrm{H}(x)}\,e^{\beta x},$$

α et β désignant deux constantes et H la fonction auxiliaire qui sert de numérateur à $\operatorname{sn} x$. En vertu des formules

$$\mathrm{H}(x+2\mathrm{K}) = -\mathrm{H}(x),$$

$$\mathrm{H}\left(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right) = -\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}\left(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right)},$$

on aura

$$f(x+2\mathrm{K}) = f(x)\,e^{2\beta\mathrm{K}},$$

$$f\left(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right) = f(x)\,e^{-\frac{\pi\beta\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}+2\beta\mathrm{K}'\sqrt{-1}}$$

on peut déterminer α et β au moyen des formules

$$\mu = e^{2\beta K}, \qquad \mu' = e^{-\frac{\pi\beta\sqrt{-1}}{K} + 2\beta K'\sqrt{-1}},$$

et alors on aura

$$f(x+2K) = \mu f(x),$$
$$f(x+2K'\sqrt{-1}) = \mu' f(x);$$

si l'on considère alors le rapport $\frac{F(x)}{f(x)}$, on voit qu'il aura pour périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$. Ainsi l'expression générale des fonctions de seconde espèce sera le produit de $f(x)$ par une fonction aux périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$. Mais on peut obtenir sous une forme plus simple l'expression générale de $F(x)$ ainsi qu'il suit :

Le produit

$$F(z)f(x-z),$$

considéré comme fonction de z, a pour périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$: la somme de ses résidus pris à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes est nulle; or, en appelant a_1, a_2, ..., les infinis de $F(z)$ et le seul infini de $f(x-z)$ étant x, on a

$$(3) \qquad 0 = \sum \mathcal{E}_a F(z)f(x-z) + \mathcal{E}_x F(z)f(x-z).$$

Or $\mathcal{E}_x f(z-x)F(z)$ est égal à

$$\mathcal{E}_x F(z)\frac{H(z-x+\alpha)}{H(z-x)}e^{\beta(z-x)} = F(x)\frac{H(\alpha)}{H'(0)}$$

et

$$\mathcal{E}_a F(z)f(x-z) = [\lim F(z)(z-a)]_{z=a} f(x-a)$$

si a est un infini simple, sinon $\mathcal{E}_a F(z)f(x-z)$ est de la forme

$$A f(x-a) + B f'(x-a) + \ldots,$$

en sorte que l'expression générale d'une fonction de seconde espèce sera, en vertu de (3),

$$F(x) = \sum [A f(x-a) + B f'(x-a) + \ldots],$$

A, B, C, ... désignant des constantes, et a_1, a_2, ... les infinis contenus dans un même parallélogramme des périodes.

C'est en s'appuyant sur cette formule, due à M. Hermite (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 5), que l'on parvient dans certains cas à intégrer les équations linéaires à coefficients périodiques : nous allons en donner un exemple.

XX. — Équation de Lamé.

Lamé a rencontré dans une question importante de Physique mathématique (*Équilibre des températures de l'ellipsoïde*) une équation linéaire du second ordre qui a acquis une grande célébrité : cette équation s'est d'abord présentée sous la forme

$$f(\lambda)\frac{d^2y}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}f'(\lambda)\frac{dy}{d\lambda} + (g\lambda + h)y = 0.$$

y est la fonction inconnue, λ est la variable, g et h sont des constantes ; enfin on a

$$f(\lambda) = (\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2),$$

a, b, c désignant de nouvelles constantes.

Nous commencerons par transformer cette équation en posant

$$\lambda = z^2 - a^2;$$

nous aurons alors, en faisant

$$\theta(z) = (z^2 - a^2 + b^2)(z^2 - a^2 + c^2),$$

les transformées successives

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{f(\lambda)}\frac{dy}{d\lambda}\right] + \frac{g\lambda + h}{\sqrt{f(\lambda)}}y = 0,$$

$$\frac{d}{dz}\left[\sqrt{\theta(z)}\frac{dy}{dz}\right] + \frac{g(z^2 - a^2) - h}{\sqrt{\theta(z)}}y = 0,$$

équation qui est de la forme

$$\theta(z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}\theta'(z)\frac{dy}{dz} + y(gz^2 - h) = 0,$$

g et h désignant toujours deux constantes différentes de celles que l'on a désignées ainsi tout à l'heure. Si l'on pose alors

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}$$

ou

$$z = \operatorname{sn} x,$$

l'équation de Lamé, en la prenant sous la forme

$$\frac{d}{dz}\left[\sqrt{\theta(z)}\frac{dy}{dz}\right] + \frac{y}{\sqrt{\theta(z)}}(gz^2 - h) = 0.$$

devient

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{y}{\sqrt{\theta(z)}}(gz^2 + h) = 0.$$

ou enfin

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y(g\operatorname{sn}^2 x + h) = 0;$$

c'est surtout de l'équation

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2 x + h]y$$

que les géomètres se sont occupés, n désignant alors un nombre entier.

Pour intégrer cette équation, nous changerons de variable et nous poserons

$$x = K'\sqrt{-1} + \varepsilon;$$

elle deviendra alors

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{d\varepsilon^2} - \left[\frac{n(n+1)}{\operatorname{sn}^2\varepsilon} + h\right]y = 0.$$

Nous poserons donc

$$y = f(\varepsilon) + A_1 f'(\varepsilon) + \ldots + A_\nu f^{\nu}(\varepsilon),$$

$$f(\varepsilon) = G\,\frac{H(\alpha + \varepsilon)}{H(\varepsilon)}\,e^{\beta\varepsilon};$$

G, α, β désignant des constantes, y peut se développer suivant les puissances positives et négatives de ε et, en choisissant convenablement G $\left[\text{en le prenant égal à } \frac{H'(0)}{H(\alpha)}\right]$, on pourra supposer que le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans f a pour coefficient 1 ; on aura alors

$$y = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{A_1}{\varepsilon^2} + \frac{A_2 1.2}{\varepsilon^3} - \ldots \pm \frac{A_\nu .1.2.3\ldots\nu}{\varepsilon^{\nu+1}} + \eta,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + p_0 + p_2\varepsilon^2 + p_4\varepsilon^4 + \ldots,$$

η désignant une quantité finie pour $\varepsilon = 0$ et $p_0, p_2, \ldots$ des coefficients constants. Remplaçons y et $\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon}$ par ces valeurs dans (2), il suffira d'exprimer que, pour $\varepsilon = 0$, le premier membre ne devient pas infini et qu'il est nul ou que les coefficients de ε^0, ε^{-1}, ε^{-2}, ... sont nuls; car ce premier membre, étant doublement périodique de seconde espèce, est constant s'il n'a pas d'infinis.

Remplaçons donc y et $\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon}$ par leurs valeurs dans (2), multiplions par ε^2; nous aurons

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1.2}{\varepsilon} - \frac{A_1 2.3}{\varepsilon^2} + \ldots \pm \frac{A_\nu 1.2.3\ldots(\nu+2)}{\varepsilon^{\nu+1}} + \ldots \\ - [n(n+1)(1 + p_0\varepsilon^2 + p_2\varepsilon^4 + \ldots) + h\varepsilon^2] \\ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{A_1}{\varepsilon^2} + \ldots \pm \frac{A_\nu 1.2\ldots\nu}{\varepsilon^{\nu+1}} \ldots\right), \end{aligned}$$

en n'écrivant pas les termes inutiles. En égalant à zéro les termes en ε^2, ε, ε^0, . . ., $\varepsilon^{-(\nu+1)}$, on trouve

$$\begin{aligned}
1.2.3\ldots(\nu+2)A_\nu &= 1.2.3\ldots\nu A_\nu n(n+1),\\
1.2.3\ldots(\nu+1)A_{\nu-1} &= 1.2.3\ldots(\nu-1)A_{\nu-1} n(n+1),\\
1.2.3\ldots\nu A_{\nu-2} &= 1.2.3\ldots(\nu-2)A_{\nu-2} n(n+1)\\
&\quad + 1.2.3\ldots\nu A_\nu[n(n+1)p_0 + h],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire d'abord

$$(\nu+1)(\nu+2) = n(n+1),$$

ce qui montre que n doit être entier, si l'on veut que ν soit fini. On voit ensuite que $A_{\nu-1} = 0$, $A_{\nu-3} = 0$, . . . , en sorte que les dérivées de f qui entrent dans y sont de même parité. Enfin on a deux équations de plus qu'il n'en faut pour calculer les A : on disposera alors de α et β, de manière à satisfaire à ces équations. Quand on aura une solution de l'équation (2), il sera facile d'en avoir une autre, et l'on voit que l'équation de Lamé est intégrable par les fonctions elliptiques quand n est entier.

XXI. — Étude particulière des équations du second ordre.

Les équations linéaires du second ordre, sans second membre, jouissent de propriétés curieuses qui ont été révélées surtout par Sturm, et dont nous allons faire connaître les principales.

Nous avons vu qu'en posant $y = y_1 z$, y_1 étant une solution d'une équation différentielle linéaire en y et sans second membre, l'équation s'abaissait sans perdre sa forme linéaire ; mais on peut abaisser encore autrement l'équation quand elle est du second ordre.

Considérons, en effet, l'équation suivante, où A, B, C sont des fonctions quelconques de x,

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0; \tag{1}$$

si y_1 est une solution de cette équation, on a

$$(2) \qquad A \frac{d^2 y_1}{dx^2} + B \frac{dy_1}{dx} + C y_1 = 0;$$

multipliant (1) par y_1 et (2) par y, puis retranchant, on a

$$A \frac{y_1 d^2 y - y\, d^2 y_1}{dx^2} + B \frac{y_1 dy - y\, dy_1}{dx} = 0.$$

Si alors on pose

$$(3) \qquad \frac{y_1 dy - y\, dy_1}{dx} = z,$$

ou (p. 59)

$$y = e^{\int \frac{dy_1}{y_1}} \int \frac{z}{y_1} e^{-\int \frac{dy_1}{y_1}} dx$$

ou

$$(4) \qquad y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2} dx,$$

on a

$$A \frac{dz}{dx} + B z = 0$$

ou

$$z = e^{\int -\frac{B}{A} dx}$$

ou enfin

$$y = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{B}{A} dx} dx.$$

Théorème I. — *La fonction y définie par l'équation* (1) *n'a que des zéros simples, si $\frac{B}{A}$ reste fini.*

En effet, l'équation (3) devient, en remplaçant z par sa valeur,

$$(5) \qquad y \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy}{dx} = e^{-\int \frac{B}{A} dx}.$$

Pour que l'on eût $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, il faudrait que $\frac{B}{A}$ fût infini ou que y_1 ou $\frac{dy_1}{dx}$ le fussent.

Théorème II. — *En général, deux solutions y et y_1 ne*

pourront pas s'annuler en même temps, et leurs racines se séparent mutuellement (quand on les suppose réelles ainsi que x).

La première partie de ce théorème est évidente, en vertu de (5) : si l'on fait alors $x = \alpha$ et $x = \beta$, α et β désignant deux racines successives de $y_1 = 0$, $\frac{dy_1}{dx}$ prendra des valeurs de signes contraires ; donc, en vertu de (5), comme le second membre de cette équation est positif, il faudra que y prenne aussi des valeurs de signes contraires ; donc entre deux racines de $y_1 = 0$, il y en a une de $y = 0$, et entre deux racines de $y = 0$, il y en a une de $y_1 = 0$. Mais cette conclusion est soumise bien entendu à des restrictions qui dépendent de la continuité des solutions considérées.

Théorème III. — *L'équation* (1) *peut toujours être ramenée à la forme dite canonique*

$$\frac{d}{dx}\left(X\frac{dy}{dx}\right) + Vy = 0, \tag{6}$$

X *et* V *désignant des fonctions de* x *seul.*

En effet, cette équation développée est

$$X\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{dX}{dx} + Vy = 0.$$

et on l'identifiera avec (1) en posant

$$\frac{X}{A} = \frac{\frac{dX}{dx}}{B} = \frac{V}{C},$$

d'où l'on tire

$$X = e^{\int\frac{B}{A}dx}, \qquad V = \frac{C}{A}e^{\int\frac{B}{A}dx}.$$

Théorème IV. — *Si l'on met en évidence un paramètre* n, *l'équation canonique pourra s'écrire*

$$\frac{d}{dx}\left(X\frac{dy}{dx}\right) + nVy = 0; \tag{7}$$

si l'on change n en n_1, on a la nouvelle équation

$$(8) \qquad \frac{d}{dx}\left(X \frac{dy_1}{dx}\right) + n_1 V y_1 = 0;$$

les fonctions y et y_1 satisfaisant à ces équations, donneront, en supposant la variable réelle,

$$\int_\alpha^\beta y_1 y V \, dx = 0,$$

α et β désignant soit deux valeurs annulant X, soit une valeur annulant y et une valeur annulant y_1.

En effet, en multipliant (7) par y_1 et (8) par y, on a par soustraction

$$X \frac{y_1 d^2 y - y d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dX}{dx} \frac{y_1 dy - y dy_1}{dx} + (n y_1 y - n_1 y y_1) V = 0$$

ou bien

$$\frac{d}{dx}\left[X \frac{y_1 dy - y dy_1}{dx}\right] = (n_1 - n) y y_1 V.$$

En prenant pour limites d'intégration les nombres α, β choisis comme il a été dit, on a

$$0 = (n - n_1) \int_\alpha^\beta y y_1 V \, dx,$$

et, comme $n - n_1 \gtrless 0$, le théorème précédent est démontré.

Théorème V. — *Entre les mêmes limites, on a encore*

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy}{dx} \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

En effet, multipliant (7) par $n_1 y_1$ et (8) par $n y$, puis soustrayant, on a

$$\frac{d}{dx}\left(X \frac{n_1 y_1 dy - n y dy_1}{dx}\right) = (n - n_1) \frac{dy}{dx} \frac{dy_1}{dx};$$

l'intégration donne la formule qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME VI. — *On peut toujours ramener l'équation linéaire du second ordre à la forme*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - Gy = 0,$$

G *désignant une fonction de x seul.*

En effet, considérons l'équation

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0;$$

si nous faisons $y = tz$, nous aurons (p. 121 et 122)

$$At\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2A\frac{dt}{dx} + Bt\right)\frac{dz}{dx} + z\left(A\frac{d^2t}{dx^2} + B\frac{dt}{dx} + Ct\right) = 0;$$

l'équation sera donc ramenée à la forme voulue, si l'on dispose de t, de telle sorte que

$$2A\frac{dt}{dx} + Bt = 0$$

ou que

$$t = e^{-\int \frac{B}{2A}dx}.$$

Lorsque l'équation a la forme canonique

$$\frac{d}{dx}\left(X\frac{dy}{dt}\right) + Yy = 0,$$

alors

$$A = X, \qquad B = \frac{dX}{dx}, \qquad C = Y,$$

et il faut prendre

$$t = e^{-\int \frac{X'}{2X}dx} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$$

XXII. — Invariants des équations différentielles.

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n :

$$(1) \qquad \frac{d^nY}{dX^n} + P_1\frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} + \ldots + P_nY = 0.$$

dans laquelle Y désigne la fonction inconnue, X la variable et $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des fonctions de X. Si l'on pose

$$(2)\qquad \frac{dx}{dX} = \varphi(x), \qquad Y = y\psi(x),$$

il est facile de voir que l'équation (1) se transforme en une autre équation linéaire du même ordre

$$(3)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0.$$

Nous démontrerons qu'il existe des fonctions de $P_1, P_2, \ldots$ et de leurs dérivées par rapport à X, telles que, l'une d'elles étant $F(P_1, P_2, \ldots, P'_1, P'_2, \ldots)$, on a

$$(4)\quad F(P_1, P_2, \ldots, P'_1, P'_2, \ldots) = F(p_1, p_2, \ldots, p'_1, p'_2, \ldots)\varphi^\omega.$$

Ces fonctions F sont des *invariants*, et, si $\omega = 0$, on a ce que l'on appelle un *invariant absolu*.

Le nombre des invariants distincts est nécessairement limité : en effet, une équation telle que (4) établit une relation entre les P et les p; or, quand les P, φ et ψ sont donnés, les p sont déterminés; il ne peut donc exister entre ces quantités plus de n relations distinctes; les formules, telles que (4), sont donc au plus au nombre de $n - 1$ et, si l'on suppose $\omega = 0$, au nombre de $n - 2$ au plus. Ainsi *le nombre des invariants absolus distincts d'une équation linéaire d'ordre n est au plus égal à n — 2, et les équations d'ordre inférieur à 3 n'ont pas d'invariants absolus.*

Si l'on considère une équation linéaire du second ordre

$$(5)\qquad z'' = az' + bz,$$

dans laquelle z désigne la fonction inconnue, x la variable z', z'' les dérivées de z et a, b des fonctions données de x, et si l'on pose

$$(6)\qquad y = z^{n-1},$$

on trouve

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (n-1)z^{n-2}z', \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = (n-1)(n-2)z^{n-3}z'^2 + (n-1)z^{n-2}z'' \\ \qquad = (n-1)(n-2)z^{n-3}z'^2 \\ \qquad\quad + (n-1)a z^{n-2}z' + (n-1)b z^{n-1}, \end{cases}$$

et, en continuant de différentier en remplaçant toujours z'' par sa valeur tirée de (5),

$$(8)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{A} z z'^{n-1} + \mathrm{B} z^2 z'^{n-2} + \ldots \mathrm{L} z^{n-1};$$

l'élimination de z^{n-1}, $z^{n-1}z'$, ... entre ces équations fournit une équation linéaire d'ordre n en y. Il est facile de déduire ses solutions de celles de l'équation (5) : appelons en effet z_1 et z_2 deux solutions distinctes de (5); l'équation en z sera satisfaite en prenant $z = c_1 z_1 + c_2 z_2$, c_1 et c_2 désignant des constantes, et l'équation en y le sera en prenant

$$y = (c_1 z_1 + c_2 z_2)^{n-1}$$

et, par suite, en prenant

$$y = (c_1 z_1 + c_2 z_2)^{n-1} + (c'_1 z_1 + c'_2 z_2)^{n-1} + \ldots,$$

c'_1, c'_2, c''_1, c''_2, ... désignant de nouvelles constantes arbitraires, et, par conséquent, en prenant y égal à l'une des quantités z_1^{n-1}, $z_1^{n-2} z_2$, ..., qui seront autant d'intégrales distinctes de cette équation; les intégrales distinctes de l'équation en y peuvent donc être mises sous la forme

$$y_1, \qquad y_2 = y_1 t, \qquad y_3 = y_1 t^2, \qquad \ldots, \qquad y_n = y_1 t^{n-1}.$$

Réciproquement, si une équation linéaire et homogène d'ordre n admet des intégrales de cette forme, elle se transforme en équation linéaire homogène du second ordre en posant $y = z^{n-1}$; en effet, on peut former une équation linéaire et du second ordre en z ayant pour solutions $\sqrt[n-1]{y_1}$ et $t\sqrt[n-1]{y_1}$; cette équation, quand on y posera $z^{n-1} = y$, fournira alors l'équation en y.

Cela posé, chercher la condition pour qu'une équation d'ordre n

$$(3)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

se transforme en une du second par la substitution $z^{n-1} = y$, ou ait ses intégrales de la forme $y_1, y_1 t, y_1 t^2, \ldots$ c'est une seule et même question.

Or éliminons $z^{n-1}, z^{n-2}z', \ldots, z'^{n-1}$ entre les équations (6), (7), (8) : nous obtiendrons, comme nous l'avons fait observer, une équation d'ordre n

$$(9)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0.$$

Si, entre les équations qui donnent $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et leurs dérivées, on élimine a, b et leurs dérivées, on obtiendra des relations invariantes exprimant que l'équation (9) a ses solutions de la forme $y_1, y_1 t, \ldots, y_1 t^{n-1}$. On peut obtenir ces relations autrement : formons l'équation admettant les solutions distinctes $y_1, ty_1, \ldots, t^{n-1}y_1$. Soit $F(y)$ cette équation. on aura $F(y_1) = 0$ et $F(ty_1) = 0$; donc les équations $F(y) = 0$ et $F(ty) = 0$ ont une solution commune, et l'on peut dire que

$$(10)\qquad F(ty) = 0, \qquad \ldots, \qquad F(t^{n-1}y) = 0$$

ont chacune une solution commune avec $F = 0$, que nous supposerons être l'équation (9). Réciproquement, si les équations (10) ont chacune une solution commune avec $F = 0$, cette équation aura pour solutions $y_1, ty_1, t^2y_1, \ldots$; or, pour exprimer que deux équations ont une intégrale commune (p. 129), il faut une condition; donc enfin, pour exprimer que l'équation $F = 0$ a une solution commune avec chacune des $n-1$ équations (10), il faudra écrire $n-1$ relations entre les coefficients p et leurs dérivées; ces relations seront d'ailleurs rationnelles. Ces relations seront évidemment invariantes; c'est-à-dire que leurs premiers membres seront des invariants; en divisant alors, si cela est

nécessaire, les premiers membres de ces équations par une puissance convenable de l'un d'eux, on trouvera $n - 2$ invariants absolus.

Ces $n - 2$ invariants absolus seront distincts, car la relation qui exprime que $F(y)$ a une intégrale commune avec $F(t^i y)$ est évidemment distincte de celle qui exprime qu'elle a une intégrale commune avec $F(t^j y)$.

S'il fallait effectivement appliquer ce procédé à la recherche des invariants, il faudrait y renoncer; car les calculs seraient d'une longueur rebutante : nous allons indiquer une autre méthode encore assez pénible à appliquer, mais plus pratique, et qui aura en outre l'avantage de bien mettre en évidence les propriétés des invariants. La méthode précédente établit le théorème suivant :

Pour qu'une équation différentielle linéaire puisse se ramener à une équation du second ordre par un changement de variable

$$\frac{dx}{dX} = \varphi(x), \qquad Y = y\,\psi(x).$$

il faut et il suffit que ses invariants soient nuls.

XXIII. — Équation canonique invariante.

Je suppose que l'on connaisse un invariant V de l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^n Y}{dX^n} + \frac{n}{1} P_1 \frac{d^{n-1} Y}{dX^{n-1}} + \ldots + P_n Y = 0;$$

effectuons la substitution

$$\frac{dx}{dX} = \varphi(x), \qquad Y = y\,\psi(x),$$

et déterminons φ et ψ de telle sorte que la fonction v, transformée de V, soit égale à l'unité et que le coefficient p_i de $\frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}}$ dans l'équation transformée soit égal à l'unité. Les

$n-2$ invariants absolus sont des fonctions de p_1, p_2, ..., p_n; donc il existe $n-2$ relations entre p_1, p_2, ..., p_n et les invariants; si donc on rend p_1 égal à zéro et si l'on choisit un invariant, c'est-à-dire une fonction des p égale à un, les p seront des fonctions des invariants absolus, c'est-à-dire eux-mêmes des invariants absolus.

Le même raisonnement prouve évidemment que l'on peut choisir arbitrairement deux coefficients de l'équation transformée, pourvu qu'ils ne soient pas pris égaux à des fonctions de x qui ne soient pas fonctions des invariants, et l'équation transformée aura encore pour coefficients des invariants absolus. Mais, si nous avons dit de prendre $p_1 = 0$, c'est qu'il est facile d'annuler ce coefficient et beaucoup plus difficile d'annuler les autres.

Nous voilà donc en état de calculer tous les invariants absolus, pourvu que nous ayons à notre disposition un seul invariant. Nous appellerons *équation canonique invariante* l'équation que nous venons d'apprendre à former et dont les coefficients sont des invariants absolus.

Lorsque tous les invariants sont constants, les coefficients de l'équation canonique sont constants; donc :

Lorsque les invariants d'une équation sont constants, elle peut se ramener à une équation à coefficients constants par un changement de variables.

Soient p_1, p_2, ..., p_n des quantités rationnellement exprimables au moyen de α et β : si entre α et β il existe une relation $f(\alpha, \beta) = 0$ de genre μ, on dira que les quantités p forment un ensemble de genre μ [bien entendu, si l'on peut choisir α et β de manière que $f(\alpha, \beta) = 0$ soit d'un genre ν différent de μ et si $\nu < \mu$, on dira que le genre de l'ensemble p_1, p_2, ... est ν].

Si l'on convient d'appeler équation différentielle de genre μ celle dont les coefficients forment un ensemble de genre μ, on pourra énoncer le théorème suivant, dû à M. Halphen.

ainsi que toutes les considérations précédentes sur les invariants (*Mémoires des Savants étrangers*, 1884).

Pour qu'une équation différentielle linéaire soit réductible à une équation de genre μ, *il faut et il suffit que ses invariants absolus forment un ensemble de genre* μ *et, en particulier, pour que l'on puisse rendre ses coefficients rationnels, il faut et il suffit que ses invariants absolus soient rationnels.*

Nous ferons une dernière remarque, c'est que tout invariant d'une équation est aussi un invariant de l'équation au multiplicateur ou de l'adjointe : cela résulte de la façon même dont se calculent les coefficients de l'adjointe (p. 127).

XXIV. — Calcul d'un invariant.

M. Halphen, dans son Mémoire déjà cité et qui a remporté le grand prix de Mathématiques, fait connaître un invariant de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + n p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n y = 0\,;$$

cet invariant est

$$(1) \qquad p_2'' - 3(p_2' - 2p_1p_1') + 2(p_3 - 3p_1p_2 + 2p_1^3)\,;$$

pour le trouver on peut appliquer à une équation du troisième degré le procédé général indiqué plus haut et on vérifie sans peine que cet invariant, considéré comme appartenant à une équation quelconque, se trouve multiplié par $[\varphi(x)]^3$ quand on effectue la substitution

$$\frac{dx}{dX} = \varphi(x), \qquad Y = y\psi(x).$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Intégrer

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y.$$

2. Intégrer

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + y = 0,$$

3. L'équation

$$y - \frac{n}{1}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^4 y}{dx^4} - \ldots \pm \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} = 0$$

a pour solution

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^n}\, d\alpha;$$

on demande de l'abaisser. La même expression satisfait aussi à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\,\frac{n-1}{x}\,\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

que l'on demande d'intégrer.

4. Intégrer les équations

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = e^x + e^{-x},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^x.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y + \int_0^x \frac{e^x}{\sqrt{x}}\, dx,$$

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} - y = x.$$

5. Intégrer

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(1+x^2) + 2nx\frac{dy}{dx} + (n^2-n)y = 0,$$

sachant que $\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\frac{1}{1+x^2}$ est une solution.

6. Intégrer

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2nx+1)\frac{dy}{dx}+(n^2-n)y=0,$$

sachant que $\dfrac{d^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}}$ est solution.

7. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ est le produit de $(1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}$ par un polynôme entier P_n; l'équation $P_n=0$ a toutes ses racines réelles, le polynôme P_n satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients entiers que l'on demande de former et d'intégrer complètement.

8. Intégrer

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0,$$

sachant que

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$$

est une solution.

9. L'équation

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}-y=0$$

s'intègre par un changement de variable très simple.

10. Si y est solution de

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+ny=0,$$

$ye^{\int P\,dx}$ sera solution de

$$\frac{d^2y}{dx^2}-P\frac{dy}{dx}+ny=0.$$

(LEBESGUE.)

11. Intégrer

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y=0,$$

sachant que $\dfrac{\sin x}{x}$ est une solution.

12. Les polynômes U_0, U_1, U_2, ... définis par l'équation

$$e^{\frac{z^2}{2}+zx}=U_0+U_1z+U_2z^2+\ldots$$

satisfont à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - ny = 0;$$

on demande d'intégrer cette équation et de prouver que

$$U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1}.$$

(LAGUERRE, *Bulletin de la Société mathématique*, t. VII.)

13. L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - ax\frac{dy}{dx} + \mu a y = 0$$

a pour solution

$$y = x^\mu - \frac{\mu(\mu-1)}{2a}x^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2a.4a}x^{\mu-4} - \dots.$$

(STEEN.)

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. — Remarques sur le calcul inverse des intégrales définies.

Il est, en général, impossible de trouver une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad f(x) = \int_a^b \psi(x, z)\varphi(z)\,dz,$$

$f(z)$ et $\psi(x, z)$ désignant des fonctions données et a, b des nombres donnés. En effet, si $f(x)$ devient infini, $\varphi(z)\psi(x, z)$ devient lui-même infini, mais l'équation

$$\psi(x, z)\varphi(z) = \infty$$

sera satisfaite, en général, pour des valeurs de x et z variant simultanément d'une manière continue, de sorte que l'intégrale sera infinie pour des valeurs de x formant une suite continue; la fonction $f(x)$ sera donc infinie pour une suite continue de valeurs de x, ce qui n'a pas lieu en général.

Ainsi l'on ne saurait avoir, quel que soit x,

$$\frac{1}{x} = \int_{-1}^{+1} e^{zx}\varphi(z)\,dz;$$

en effet, pour $x = 0$, l'intégrale devant être infinie, il faut que $\varphi(z)$ soit infini entre -1 et $+1$, et l'intégrale alors sera toujours infinie : elle ne pourra donc en général représenter $\frac{1}{x}$.

Quoi qu'il en soit, *si l'équation* (1) *admet une solution, ou, plus généralement, s'il existe une fonction* $\theta(x, z)$, *telle*

que l'on ait

$$f(x) = \int_a^b \theta(x, z)\,dz,$$

il en existera une infinité d'autres de la forme

$$\theta(x, z) + \varpi(z, x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \varpi(z, x)\,dz,$$

ϖ *désignant une fonction arbitraire.*

En effet, soit $\theta(x, z) + \chi(x, z)$ une autre solution (s'il n'en existe pas d'autre, χ sera nul), on aura

$$f(x) = \int_a^b \theta(x, z)\,dz + \int_a^b \chi(x, z)\,dz$$

ou

(2) $$\int_a^b \chi(x, z)\,dz = 0;$$

on y satisfait en prenant

$$\chi(x, z) = \varpi(z, x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \varpi(z, x)\,dz;$$

d'ailleurs toute solution de (2) est de cette forme; car, si $\chi(z, x)$ satisfait à (2), on a identiquement

$$\chi(x, z) = \chi(x, z) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \chi(x, z)\,dz.$$

II. — Résolution d'un problème.

Problème I. — *Trouver une fonction $\varphi_n(x)$, telle que l'on ait*

(1) $$\int_a^b \theta(x)\varphi_n(x)\,dx = 0,$$

$\theta(x)$ *désignant un polynôme arbitraire de degré $n-1$.*

Soient $\varphi_n^{-1}(x)$, $\varphi_n^{-2}(x)$, ... les intégrales successives de

$\varphi_n(x)$, prises de manière à s'annuler pour $x = a$; on a, en intégrant par parties, le premier membre de (1)

$$\theta(b)\varphi_n^{-1}(b) - \theta'(b)\varphi_n^{-2}(b) + \ldots \mp \theta^{n-1}(b)\varphi_n^{-n}(b) = 0.$$

Cette formule ayant lieu, quelle que soit la fonction $\theta(x)$ de degré $n-1$, faisons successivement $\theta(x) = 1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$, nous aurons

$$\varphi_n^{-1}(b) = 0, \qquad \varphi_n^{2}(b) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n^{-n}(b) = 0;$$

la fonction $\varphi_n^{-n}(x)$ ayant toutes ses dérivées nulles pour $x = a$ et $x = b$, jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ inclusivement, on aura

$$\varphi_n^{-n}(x) = (x-a)^n(x-b)^n\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant fini pour $x = a$ et $x = b$, et l'on voit d'ailleurs, *a posteriori*, que toute expression de la forme précédente satisfera à la question. On en conclut

$$\varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)].$$

et, sans nuire à la généralité, on peut aussi poser

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n}\,\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)];$$

$\varphi_n(x)$ est alors le coefficient de t^n dans le développement de $\psi(z)\dfrac{dz}{dx}$, z désignant la racine de l'équation

$$z = x + t\,\frac{(z-a)(z-b)}{b-a}, \tag{2}$$

qui peut se développer par la formule de Lagrange (p. 357, t. III). Cette dernière formule donne en effet

$$\int\psi(z)\,dz = \int\psi(x)\,dx + t\,\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\,\psi(x) + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)}{(b-a)^n}\right] + \ldots$$

et, en différentiant,

$$\psi(z)\frac{dz}{dx} = \psi(x) + t\,\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\,\psi(x)\right] + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{(b-a)^n}\,\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)] + \ldots,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Quand on suppose $a = -1$, $b = +1$, $\psi(x) = 1$, on a

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n;$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$, dans ce cas, sont ce que l'on appelle les *polynômes* de *Legendre;* Legendre les définissait comme étant les coefficients des diverses puissances de t dans le développement de $(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances de t; en effet, l'équation (2) se réduit dans le cas actuel à

$$z = x + t\,\frac{x^2-1}{2},$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad z = \frac{1 \pm \sqrt{1-2tx+t^2}}{t},$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}};$$

il faut prendre le signe + devant le radical, parce que la racine que développe la série de Lagrange doit se réduire à x pour $t = 0$, ce qui exige que dans la formule (3) on prenne le signe — ; si donc on pose

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} = X_0 + tX_1 + \ldots + t^nX_n + \ldots,$$

on aura

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Cette formule est due à O. Rodrigues.

PROBLÈME II. — *Trouver une fonction $\varphi(x)$ ne possédant pas dans l'intervalle compris entre $x = a$ et $x = b$ une*

infinité de maxima et de minima et donnant lieu à la formule

$$(1)\qquad \int_a^b x^n \varphi(x)\,dx = 0$$

quel que soit n.

La fonction $\varphi(x)$, n'ayant pas entre a et b une infinité de maxima et de minima, ne peut non plus avoir une infinité de zéros dans cet intervalle, à moins d'être identiquement nulle. Soit alors $\theta(x)$ un polynôme entier changeant de signe avec $\varphi(x)$: l'intégrale

$$\int_a^b \theta(x)\varphi(x)\,dx$$

sera différente de zéro, tous ses éléments étant positifs si $\varphi(x)$ n'est pas identiquement nul, ce qui est absurde en vertu de (1); on doit donc avoir $\varphi(x) = 0$ dans l'hypothèse où nous nous plaçons.

III. — Polynômes de Legendre.

D'après ce que nous avons vu, on peut définir le polynôme X_n ou $X_n(x)$ de Legendre comme le coefficient de t^n dans le développement de $(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ ordonné suivant les puissances de t, et, à ce point de vue, on a

$$(1)\qquad X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz(1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{(z - x)^{n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon moindre que un, le point x étant à l'intérieur de ce cercle. On a aussi, comme on a vu,

$$(2)\qquad X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

et, par suite,

$$(3)\qquad X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{1}{2^n} \int \frac{(z^2 - 1)^n\,dz}{(z - x)^{n+1}};$$

d'ailleurs, quel que soit le polynôme de degré $n-1$ représenté par $\theta(x)$, on a

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1} \theta(x) X_n \, dx = 0.$$

Chacune de ces propriétés va nous en fournir une foule d'autres.

Et d'abord, si nous posons

$$(5)\qquad y = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 t + \ldots + X_n t^n + \ldots$$

on voit que, pour $x = 1$, y se réduit à $(1-t)^{-1}$, donc dans ce cas $X_0 = X_1 = X_2 = \ldots = 1$; ainsi :

Quand on suppose $x = 1$, la fonction X_n se réduit à l'unité; de même, en faisant $x = -1$, on verrait que $X_n = (-1)^n$.

Si l'on fait $x = 0$, y se réduit à $(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$, dont le développement est bien connu; on en conclut que :

Pour $x = 0$, on a $X_1 = X_3 = \ldots = X_{2n+1} = 0$,

$$X_{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

On a, en posant $x = \cos\gamma$,

$$y = (1 - e^{\gamma\sqrt{-1}}t)^{-\frac{1}{2}}(1 - e^{-\gamma\sqrt{-1}}t)^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on voit que y sera développable par la formule (5); si t est moindre que l'unité, on a seulement un module moindre que l'unité. Tant que x sera compris entre $+1$ et -1, on conclut de la formule précédente et de la formule du binôme

$$y = \left(1 + \frac{1}{2} t e^{\gamma\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4} t^2 e^{2\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\right)$$
$$\times\left(1 + \frac{1}{2} t e^{-\gamma\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4} t^2 e^{-2\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\right)$$

et, par suite,

$$y = 1 + \frac{1}{2} t\left(e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right) + \ldots$$
$$+ t^{n+1}\left(\frac{1.3\ldots\overline{2n+1}}{2.4\ldots\overline{2n+2}} e^{n\gamma\sqrt{-1}} + \frac{1.3\ldots\overline{2n-1}}{2.4\ldots 2n} \frac{1}{2} e^{\overline{n-2}\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\right)$$

ou bien

$$y = 1 + t\cos\gamma + \ldots$$
$$+ 2t^{n+1}\left(\frac{1.3\ldots\overline{2n+1}}{2.4\ldots\overline{2n+2}} \cos n\gamma + \frac{1.3\ldots\overline{2n-1}}{2.4\ldots 2n} \frac{1}{2} \cos \overline{n-2}\gamma + \ldots\right)$$

donc, en comparant avec (5),

$$X_{n+1} = 2\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2n+1}}{2.4.6\ldots\overline{2n+2}} \cos n\gamma + \frac{1.3\ldots\overline{2n-1}}{2.4\ldots 2n} \frac{1}{2} \cos \overline{n-2}\gamma + \ldots\right)$$

Cette valeur de X_n est évidemment maxima pour $\gamma = 0$, ou pour $\cos\gamma = 1$; donc :

La plus grande valeur que puisse acquérir le polynôme X_n entre les limites -1 et $+1$ de sa variable est égale à un.

On tire de (5)

$$\frac{dy}{dt} = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{3}{2}}(x - t);$$

ou bien, en multipliant par $(1 - 2tx + t^2)$,

$$(1 - 2tx + t^2)\frac{dy}{dt} = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}}(x - t);$$

remplaçant $\frac{dy}{dt}$ et $y = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ par leurs développements déduits de (5), on a

$$(1 - 2tx + t^2)(X_1 + 2tX_2 + 3t^2X_3 + \ldots) = (x - t)(X_0 + X_1 t + \ldots);$$

en effectuant les produits indiqués et en égalant de part et d'autre les coefficients de t^n, on a

$$(6)\qquad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)X_n x + nX_{n-1} = 0.$$

Cette formule prouve que $X_n = 0$ *a toutes ses racines réelles et que les racines de* $X_{n-1} = 0$ *séparent celles de* $X_n = 0$; *toutes ces racines sont différentes et comprises entre* -1 *et* $+1$.

En effet, les polynômes X_0, X_1, ..., X_n forment une suite de Sturm, puisque, X_n s'annulant en vertu de (6), X_{n+1} et X_{n-1} sont de signes contraires; X_{n+1} et X_n ne peuvent s'annuler en même temps, sans quoi l'on aurait aussi $X_{n-1} = 0, \ldots, X_0 = 0$; or $X_0 = 1$. Enfin, pour $X = 1$, la suite n'a que des permanences, puisque $X_n = 1$; pour $x = -1$, elle n'a que des variations, puisque $X_n = (-1)^n$, donc, etc. C. Q. F. D.

On déduit de (6)

$$(2n+1)X_n(x)x = (n+1)X_{n+1}(x) + nX_{n-1}(x),$$
$$(2n+1)X_n(z)z = (n+1)X_{n+1}(z) + nX_{n-1}(z);$$

multipliant la première formule par $X_n(z)$, la seconde par $X_n(x)$ et retranchant, on a

$$\begin{aligned}(2n+1)(z-x)X_n(x)X_n(z) &= (n+1)[X_{n+1}(z)X_n(x) - X_n(z)X_{n+1}(x)]\\ &\quad - n[X_n(z)X_{n-1}(x) - X_n(x)X_{n-1}(z)].\end{aligned}$$

Faisons successivement $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, et ajoutons les formules que l'on en déduit, il viendra

$$\begin{aligned}&[X_0(x)X_0(z) + 3X_1(x)X_1(z) + \ldots + (2n+1)X_n(x)X_n(z)](z-x)\\ &\quad = (n+1)[X_{n+1}(z)X_n(x) - X_n(z)X_{n+1}(x)]\end{aligned}$$

ou enfin

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{n+1}{z-x}[X_{n+1}(z)X_n(x) - X_n(z)X_{n+1}(x)]\\ &\qquad = X_0(x)X_0(z) + 3X_1(x)X_1(z) + \ldots + (2n+1)X_n(x)X_n(z).\end{aligned}\right.$$

L'équation (6) permet de former les fonctions X_n de proche en proche; on a

$$
\begin{aligned}
X_0 &= 1,\\
X_1 &= x,\\
X_2 &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},\\
X_3 &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,\\
X_4 &= \frac{5.7}{2.4}x^4 - \frac{3.5}{2.4}2x^2 + \frac{1.3}{2.4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

et les polynômes X_n sont alternativement pairs et impairs, ce qui résulte de la simple inspection de la formule (6), ou même de la formule (2).

La formule (2) nous montre que

$$\int_{-1}^{+1} X_m \theta(x)\,dx = 0,$$

toutes les fois que $\theta(x)$ est de degré $m-1$ et, par suite, si m est différent de n,

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n\,dx = 0; \tag{8}$$

on peut se demander quelle est la valeur de l'intégrale qui entre dans cette formule, quand $m = n$. On trouve, en appliquant la règle de l'intégration par parties,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx\\
&\quad = (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n\,\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx\\
&\quad = (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n\, 1.2.3\ldots 2n\,dx;
\end{aligned}
$$

en mettant x^2-1 sous la forme $(x+1)(x-1)$, une série

d'intégrations par parties conduira enfin à

$$(9) \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

On peut arriver autrement à cette formule. Élevons en effet au carré les deux membres de la formule (5) et intégrons de -1 à $+1$, nous aurons, en ayant égard à (8),

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \int_{-1}^{+1} X_0^2 \, dx + \ldots + t^{2n} \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx + \ldots$$

ou bien

$$\frac{1}{t} \log \frac{1+t}{1-t} = \ldots + t^{2n} \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx + \ldots$$

ou

$$\frac{1}{t}\left(2t + 2\frac{t^3}{3} + \ldots + \frac{2t^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) = \ldots t^{2n} \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx \ldots;$$

en égalant les coefficients de t^{2n}, on trouve la formule (9).

IV. — Expression des fonctions X_n sous forme d'intégrales définies.

Nous avons vu que l'on avait

$$(1) \qquad X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2zx+z^2}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle de rayon R plus grand que un. Marquons les deux points critiques

$$z = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

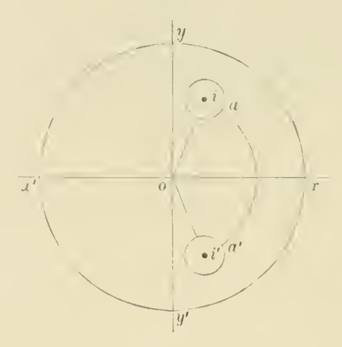
ou, en posant $x = \cos\gamma$,

$$z = e^{\pm\gamma\sqrt{-1}},$$

pour lesquels la fonction placée sous le signe $\int$ devient infinie. Soient i et i' ces deux points; soit aa' une ligne joignant

deux points voisins de i et i', avec ia et $i'a'$ comme rayons : décrivons de petits cercles ρ et ρ' autour de i et i' ; en dési-

Fig. 26.



gnant par (C), en général, l'intégrale prise le long du contour C, on aura, en supposant $\operatorname{mod} i < \mathrm{R}$,

$$(\text{circ.}\,\mathrm{R}) = +(aa') + (\rho') + (a'a) + (\rho)$$

et, comme (ρ) et (ρ') sont nuls et que

$$(aa') = (a'a),$$

on a

$$\mathrm{X}_n = 2(aa') : 2\pi\sqrt{-1} = \frac{(aa')}{\pi\sqrt{-1}}.$$

1° Si aa' est une droite, alors il faut intégrer en posant $z = x + y\sqrt{-1}$, $dz = \sqrt{-1}\,dy$, depuis $y = -\sqrt{1-x^2}$ jusqu'à $y = +\sqrt{1-x^2}$, et l'on aura

$$\mathrm{X}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-2zx+z^2}}\,\frac{1}{(x+y\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

Si l'on fait alors $y = \sqrt{1-x^2}\cos\varphi$, on a

$$\mathrm{X}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}};$$

en changeant z en $\frac{1}{z}$ dans la formule (1), on a

$$X_n = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{1-2zx+z^2}}$$

et, en traitant cette intégrale comme la précédente, on trouve

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\,(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n.$$

Enfin, en prenant pour contour d'intégration aa' l'arc de cercle décrit de l'origine comme centre et limité aux points i et i', on posera $z = e^{\theta\sqrt{-1}}$ et l'on aura

$$X_n = \frac{(aa')}{\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{e^{-(1+n)\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\,d\theta\, e^{\theta\sqrt{-1}}}{\sqrt{1-2\cos\gamma\, e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{2\theta\sqrt{-1}}}}$$

ou

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{e^{-(n+1)\theta\sqrt{-1}}\,e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}\sqrt{e^{-\theta\sqrt{-1}}-2\cos\gamma+e^{\theta\sqrt{-1}}}}$$

ou

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\gamma)}}$$

ou enfin

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\gamma)}}.$$

V. — Développements en série de fonctions X_n.

Reprenons la formule (7), (p. 191)

(1) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\\ &\quad = X_0Z_0 + 3X_1Z_1 + \ldots + (2n+1)X_nZ_n; \end{aligned}\right.$$

si l'on intègre les deux membres de -1 à $+1$, on a

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dx = 2.$$

Multiplions les deux membres de (1) par la fonction continue $f(z)$ et intégrons de -1 à $+1$, nous aurons

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)f(z)\,dz \\ &\quad = \sum_0^n (2n+1)X_n \int_{-1}^{+1} Z_n f(z)\,dz; \end{aligned} \right.$$

si l'on remplace X_n et Z_n par leurs valeurs (p. 195)

$$X_n = \int_0^\gamma \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\,d\theta}{\pi\sqrt{2(\cos\theta - \cos\gamma)}},$$

$$Z_n = \int_0^\delta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta\,d\eta}{\pi\sqrt{2(\cos\eta - \cos\delta)}},$$

le premier membre de (3) prend la forme

$$\frac{2n+1}{2\pi^2}\int_{-1}^{+1}\int_0^\gamma\int_0^\delta \left\{ \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta\cos(n+\frac{3}{2})\eta - \cos(n+\frac{1}{2})\eta\cos(n+\frac{3}{2})\theta}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\gamma)(\cos\eta-\cos\delta)}} \right\} \frac{f(z)}{z-x}\,dz\,d\theta\,d\eta$$

et sous cette forme on voit que, si la fonction $f(z)$ est de celles qui ont un nombre limité de maxima et de minima, cette intégrale n'a de valeur sensible pour $n = \infty$ que si z est voisin de x, à cause des facteurs à courte période $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta$, $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta$. On peut donc dans (3) supposer z très voisin de x, et resserrer les limites entre $x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon$, ε désignant une quantité très petite et positive; on peut alors faire sortir $f(z)$ de dessous le signe $\int$, et l'on est ramené à chercher la

limite de

$$f(x)\int_{-1}^{+1}\frac{n+1}{x-z}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz,$$

qui, en vertu de (2), est égale à $2f(x)$; on a donc, en faisant $n=\infty$ dans (3),

$$(4)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}X_0\displaystyle\int_{-1}^{+1}Z_0 f(z)\,dz + \ldots \\ \qquad + \dfrac{2n+1}{2}X_n\displaystyle\int_{-1}^{+1}Z_n f(z)\,dz + \ldots. \end{cases}$$

On trouve ainsi le développement de $f(x)$ en série de fonctions X_n : pour que cette formule ait lieu, il n'est pas nécessaire que $f(x)$ soit toujours continue entre les limites -1 et $+1$: il suffit que ses discontinuités ne soient pas de nature à empêcher les intégrations que l'on a été obligé de supposer (*voir* la théorie développée t. III, p. 392). Si, pour $z=x$, $f(z)$ a deux valeurs f_1 et f_2, le premier membre de (4) doit être remplacé par $\dfrac{f_1+f_2}{2}$.

Si l'on pose

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{2}X_0\int_{-1}^{+1}Z_0 f(z)\,dz + \ldots + \frac{2n+1}{2}X_n\int_{-1}^{+1}Z_n f(z)\,dz.$$

le second membre de cette équation sera un polynôme $\Theta_n(x)$ de degré n, et, parmi tous les polynômes de degré n, ce sera celui qui s'approche le plus de $f(x)$ ou, si l'on veut, pour être plus correct, ce sera celui qui rendra

$$u = \int_{-1}^{+1}[f(x) - \Theta_n(x)]^2\,dx$$

minimum. En effet, tout polynôme $\Theta_n(x)$ peut se développer ainsi

$$\Theta_n(x) = A_0X_0 + A_1X_1 + \ldots + A_nX_n,$$

A_0, A_1, ... désignant des coefficients constants. Déterminons

ces coefficients de telle sorte que

$$u = \int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 X_0 - \ldots - A_n X_n]^2 dx$$

soit minimum. Pour cela, différentions par rapport aux A, et soit δ la caractéristique différentielle dans cette hypothèse, on aura

$$\delta u = 2\int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 X_0 - \ldots - A_n X_n](X_0 \delta A_0 + \ldots + X_n \delta A_n) dx.$$

Si l'on veut que u soit minimum, δu devra être nul, et par suite les coefficients de $\delta A_0, \delta A_1, \ldots$ devront l'être; remplaçant $A_0 X_0 + \ldots + A_n X_n$ par $\Theta_n(x)$, on aura alors

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - \Theta_n(x)] X_n dx = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - \Theta_n(x)] X_0 dx = 0,$$

d'où l'on tire, en général,

$$\int_{-1}^{+1} \Theta_n(x) X_i dx \quad \text{ou} \quad \frac{2 A_i}{2i+1} = \int_{-1}^{+1} X_i f(x) dx.$$

On en déduit pour A_i le coefficient de X_i dans le développement de $f(x)$. Cette propriété a été découverte par M. Plarr.

Une théorie, toute semblable à celle que nous venons de donner des polynômes X_n, pourrait être faite pour les polynômes

$$\frac{1}{2.4\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n];$$

mais, dans les intégrations, aux limites -1 et $+1$ il faudrait substituer a et b.

VI. — Intégration par les fonctions de Legendre.

Nous avons trouvé (p. 187), pour l'expression du polynôme X_n, la formule suivante :

$$X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Posons

$$z = (x^2-1)^n,$$

prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de cette formule; nous aurons

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = \frac{2nx}{x^2-1}$$

ou

$$(x^2-1)\frac{dz}{dx} - 2nxz = 0;$$

en différentiant $n+1$ fois de suite au moyen de la formule de Leibnitz, on trouve

$$(x^2-1)\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}} + (n+1)2x\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n z}{dx^n} \\ - 2nx\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} - 2n(n+1)\frac{d^n z}{dx^n} = 0.$$

Si l'on observe que $\frac{d^n z}{dx^n}$ est égal à X_n à un facteur constant près, cette formule deviendra

$$(x^2-1)\frac{d^2 X_n}{dx^2} + 2x\frac{dX_n}{dx} - n(n+1)X_n = 0,$$

en sorte que X_n est une intégrale particulière de l'équation

$$(1)\qquad (x^2-1)\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - n(n+1)y = 0.$$

Voilà donc un type d'équations linéaires du second ordre, que l'on sait intégrer complètement au moyen de quadratures

quand n est entier. La formule

$$X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad X_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle décrit autour du point x comme centre. Vérifions que la valeur de X_n mise sous cette forme (2) satisfait encore à (1); de (2) on tire

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \frac{n+1}{z-x} dz,$$

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \frac{(n+1)(n+2)}{(z-x)^2} dz;$$

portant ces valeurs dans (1), le premier membre se réduit à

$$\frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{(z^2-1)^n dz}{(z-x)^{n+3}}$$
$$\times [(n+1)(n+2)(x^2-1) + 2x(n+1)(z-x) - n(n+1)(z-x)^2].$$

Si l'on remplace x^2-1 par $z^2-1+2z(x-z)+(x-z)^2$ et x par $x-z+z$, cette formule se réduit, à un facteur constant près, à

$$\int \frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-x)^{n+2}}\right] dz,$$

c'est-à-dire à zéro. L'équation (1), ainsi qu'on devait s'y attendre, se trouve vérifiée par l'expression (2); mais la marche que nous venons de suivre pour le constater montre que l'intégrale

$$\frac{1}{2^n} \int_{-1}^{+1} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dx$$

y satisfait aussi, les calculs restant les mêmes, de sorte que

cette dernière intégrale est aussi une solution de (1). Elle peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2.4\ldots 2n}\int_{-1}^{+1}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{(z^2-1)^n}{z-x}\right]dz$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\frac{1}{2.4\ldots 2n}\int_{-1}^{+1}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n\frac{dz}{z-x}$$

ou enfin

$$\int_{-1}^{+1}\frac{X_n(z)}{z-x}dz.$$

Nous poserons

$$\Xi_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_n(z)dz}{z-x}, \tag{3}$$

en sorte que la solution la plus générale de (1) pourra se mettre sous la forme

$$AX_n+B\Xi_n,$$

A et B désignant des constantes arbitraires.

Reprenons la formule (p. 191)

$$(2n+1)xX_n-(n+1)X_{n+1}-nX_{n-1}=0; \tag{4}$$

divisons par $2(z-x)$, après y avoir changé x en z et intégrons de -1 à $+1$: nous aurons

$$\frac{1}{2}(2n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{zZ_n dz}{z-x}-(n+1)\Xi_{n+1}-n\Xi_{n-1}=0;$$

en remplaçant z par $z-x+x$ et en observant que

$$\int_{-1}^{+1}Z_n dz=0,$$

on aura

$$(2n+1)\Xi_n x-(n+1)\Xi_{n+1}-n\Xi_{n-1}=0,$$

et Ξ_n satisfait à la même équation (4) que X_n.

Or il est facile de voir que l'intégrale

$$\text{(5)} \qquad X'_n = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n+1}}$$

satisfait, comme

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^{n+1}},$$

à l'équation (4); en effet, on a l'identité

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{\sqrt{x^2 - 1} \sinh \varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n+1}} = \frac{\cosh \varphi \sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n+1}} - (n + 1) \frac{\sinh^2 \varphi (x^2 - 1)}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n+2}}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \frac{\sqrt{x^2 - 1} \sinh \varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n+1}} = (2n + 1) & \frac{x}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n+1}} \\ & - \frac{(n + 1)}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n+2}} \\ & - \frac{n}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cosh \varphi)^{n}} \end{aligned}$$

et, si l'on intègre de o à ∞, on a

$$0 = (2n + 1) X'_n x - (n + 1) X'_{n+1} - n X'_{n-1}.$$

La fonction X'_n satisfait donc bien à la même équation (4) que Ξ_n et si l'on constate que $X'_0 = \Xi_0$, $X'_1 = \Xi_1$, on aura $X'_n = \Xi_n$; or

$$\Xi_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z - x} = \log \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}},$$

$$\Xi_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{z\,dz}{z - x} = x \log \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} - 1.$$

On a ensuite

$$X'_0 = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{x + \sqrt{x^2-1}\cosh\varphi} = \log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$X'_1 = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2-1}\cosh\varphi)^2} = x\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1;$$

donc enfin $X'_n = \Xi_n$. On prouve de même que

$$\Xi_n = \int_0^{\log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} (x - \sqrt{x^2-1}\cosh\varphi)^n d\varphi.$$

VII. — Développement suivant les X_n et les Ξ_n.

Les fonctions X_n de Legendre et les fonctions conjuguées Ξ_n ont été appelées *fonctions sphériques* (*Kugelfunctionen*) par les géomètres allemands, pour une raison que l'on fera connaître plus loin; les X_n sont alors les fonctions sphériques de première espèce, les Ξ_n sont les fonctions sphériques de seconde espèce.

Les fonctions synectiques sont développables, comme nous allons voir, suivant des termes multiples des fonctions sphériques; nous allons d'abord nous occuper du développement de $\frac{1}{x-t}$, dont nous déduirons tous les autres.

Nous partirons de la formule établie (p. 191)

$$(1) \quad \frac{n+1}{x-z}(X_{n+1}Z_n - Z_{n+1}X_n) = X_0Z_0 + 3X_1Z_1 + \ldots + (2n+1)X_nZ_n,$$

et où Z_n désigne, pour abréger, $X_n(z)$. Multiplions les deux membres par $\frac{1}{2(z-t)}dz$ et intégrons de -1 à $+1$. Si nous posons $\Theta_n = \Xi_n(t)$, nous aurons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{x-z}\,\frac{dz}{z-t}\,(X_{n+1}Z_n - Z_{n+1}X_n) \\ &\quad = \Theta_0X_0 + 3\Theta_1X_1 + \ldots + (2n+1)\Theta_nX_n; \end{aligned} \right.$$

or

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{n+1}{x-z}\,\frac{dz}{z-t}\,(X_{n+1}Z_n - Z_{n+1}X_n)$$
$$= \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{x-z}-\frac{1}{z-t}\right)\frac{dz}{x-t}\,(X_nZ_{n+1}-Z_nX_{n+1});$$

la première intégrale qui figure dans le second membre de cette formule se réduit à

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-t}\left[X_0\int_{-1}^{+1}Z_0\,dz+\ldots+(2n+1)X_n\int_{-1}^{+1}Z_n\,dz\right],$$

c'est-à-dire à $\frac{1}{x-t}$; la formule (2) devient alors

$$\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{x-t}\,\frac{1}{z-t}\,(X_nZ_{n+1}-Z_nX_{n+1})+\frac{1}{x-t}$$
$$=\Theta_0X_0+3\Theta_1X_1+\ldots+(2n+1)\Theta_nX_n.$$

On en conclut que l'on aura

$$(3)\qquad \frac{1}{x-t}=\Theta_0X_0+3\Theta_1X_1+\ldots+(2n+1)\Theta_nX_n+\ldots$$

quand on pourra poser

$$\lim(n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{X_{n+1}Z_n-Z_{n+1}X_{n+1}}{z-t}\,dz=0\quad(n=\infty);$$

remplaçons dans cette formule l'intégrale de $\frac{Z_n}{z-t}$ par sa valeur; elle deviendra

$$\lim(n+1)(X_{n+1}\Theta_n-\Theta_{n+1}X_n)=0$$

ou, en vertu des formules (5), (p. 194 et 195)

$$\lim(n+1)\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}{t+\sqrt{t^2-1}\cosh\psi}\right)^n A\,d\varphi\,d\psi=0.$$

A désignant un facteur indépendant de n. Cette formule aura lieu si l'on a

$$\operatorname{mod}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}{t+\sqrt{t^2-1}\cosh\psi}\right)<1$$

ou

$$\operatorname{mod}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi) < \operatorname{mod}(t+\sqrt{t^2-1}\cos h\varphi).$$

Pour savoir quand cette formule sera satisfaite, remplaçons x par $\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$ et t par $\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)$; nous transformerons cette formule en

$$(4)\quad \operatorname{mod}\left[u+\frac{1}{u}+\cos\varphi\left(u-\frac{1}{u}\right)\right] < \operatorname{mod}\left[v+\frac{1}{v}+\cos h\psi\left(v-\frac{1}{v}\right)\right].$$

Remplaçons le premier membre par sa valeur maxima, le second par sa valeur minima; en désignant par μ le module de u, par ν celui de v, par α l'argument de u et par β celui de v, les modules des deux membres de la formule précédente seront respectivement

$$\left[\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\varphi)\right.$$
$$\left.+\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)^2(\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\sin^2\alpha)+2\left(\mu^2-\frac{1}{\mu^2}\right)\cos\varphi\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\left[\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2 h\psi)\right.$$
$$\left.+\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right)^2(\cos^2\beta\cos^2 h\psi+\sin^2\beta)+2\left(\nu^2-\frac{1}{\nu^2}\right)\cos h\psi\right]^{\frac{1}{2}}.$$

La valeur maxima du premier module, la valeur minima du second sont respectivement

$$\left[\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)+\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\right] \quad \text{ou} \quad 2\mu,$$

$$\left[\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)+\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right)\right] \quad \text{ou} \quad 2\nu;$$

si donc $\mu<\nu$, la formule (n) sera satisfaite, et la formule (1) aura lieu.

Interprétons cette condition $\mu<\nu$. Quand on se donne μ, x varie sur une ellipse d'axes $\mu+\frac{1}{\mu}$ et $\mu-\frac{1}{\mu}$ ou $\frac{1}{\mu}-\mu$, ayant pour foyers les points -1 et $+1$; quand on se donne ν, t varie le long d'une ellipse d'axes $\nu+\frac{1}{\nu}$ et $\nu-\frac{1}{\nu}$ ou $\frac{1}{\nu}-\nu$;

si donc on se donne $\nu > \mathrm{R}$, le point t restera à l'extérieur d'une ellipse d'axes $\mathrm{R} + \frac{1}{\mathrm{R}}$ et $\mathrm{R} - \frac{1}{\mathrm{R}}$, si $\mathrm{R} > 1$, et à l'intérieur d'une ellipse d'axes $\mathrm{R} + \frac{1}{\mathrm{R}}$ et $\frac{1}{\mathrm{R}} - \mathrm{R}$, si $\mathrm{R} < 1$.

Supposons maintenant que l'on ait posé

$$x = u + \frac{1}{u}, \qquad t = v + \frac{1}{v}$$

et que l'on ait

$$\operatorname{mod} v > \operatorname{mod} u \quad \text{ou} \quad \nu > \mu,$$

on aura

$$\frac{1}{x - t} = \mathrm{X}_0 \Theta_0 + 3 \mathrm{X}_1 \Theta_1 + \ldots + (2n + 1) \mathrm{X}_n \Theta_n + \ldots;$$

multiplions par $f(x)\,dx$ et intégrons le long de l'ellipse ayant pour axes $\mu + \frac{1}{\mu}$ et $\mu - \frac{1}{\mu}$ ou $\frac{1}{\mu} - \mu$. Si le point t est à l'intérieur de cette ellipse et si à l'intérieur de cette ellipse $f(t)$ reste fini, monodrome et monogène, on aura

$$2\pi\sqrt{-1}\, f(t) = \Theta_0 \int \mathrm{X}_0 f(x)\,dx + \ldots + (2n+1)\Theta_n \int \mathrm{X}_n f(x)\,dx + \ldots,$$

et $f(t)$ sera développable en une série de fonctions Θ; au contraire, multiplions par $f(t)\,dt$, en laissant ν constant, ce qui revient à faire varier le point t sur une certaine ellipse. Si le point x reste intérieur à cette ellipse et si $f(x)$ reste finie, monodrome et monogène dans cette ellipse, on aura

$$2\pi\sqrt{-1}\, f(x) = \mathrm{X}_0 \int \Theta_0 f(t)\,dt + \ldots + (2n+1)\mathrm{X}_n \int \Theta_n f(t)\,dt + \ldots,$$

et la fonction f sera développable en une série de fonctions X_n. (Pour plus de détails *voir* HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*.)

VIII. — Formule de quadrature de Gauss.

Supposons que l'on veuille évaluer une intégrale qui ait pour limites -1 et $+1$. Cette restriction n'est pas nécessaire

en théorie, mais elle l'est en pratique, comme on le verra tout à l'heure. D'ailleurs il est toujours facile, au moyen d'un changement de variable, de remplacer une intégrale qui a pour limites a et b par une autre qui ait pour limites -1 et $+1$; il suffit, si la variable est x, de poser

$$x = \frac{a+b}{2} - t\,\frac{a-b}{2},$$

t désignant la nouvelle variable.

Considérons donc l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx.$$

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, n valeurs de x comprises entre -1 et $+1$: nous pouvons supposer que ces n valeurs soient précisément les racines de l'équation $X_n = 0$, X_n désignant le polynôme de Legendre dont il a été question tout à l'heure.

Soit maintenant $f(x)$ un polynôme de degré $2n-1$ égal à $\varphi(x)$ pour $x = a_0$, $x = a_1$, ..., $x = a_{n-1}$ et pour n autres valeurs de x que nous laissons indéterminées. Substituons au calcul de l'intégrale proposée celui de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx;$$

à cet effet, divisons $f(x)$ par X_n, soient Q le quotient de degré $n-1$ et R le reste aussi de degré $n-1$: comme

$$f(x) = QX_n + R,$$

on aura

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} QX_n\,dx + \int_{-1}^{+1} R\,dx,$$

et, comme $\int_{-1}^{+1} QX_n\,dx$ est nul (p. 189), on aura

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} R\,dx.$$

Or R est déterminé par n valeurs $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ de x et par les valeurs correspondantes

$$R(a_0)=f(a_0),\ \ldots,\ R(a_{n-1})=f(a_{n-1}),$$

et l'on a

$$R(x)=\sum f(a_i)\frac{X_n(x)}{X'_n(a_i)(x-a_i)}$$

et, par suite,

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}\sum f(a_i)\frac{X_n(x)}{X'_n(a_i)(x-a_i)}\,dx$$

ou même

$$(1)\qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}\sum \varphi(a_i)\frac{X_n(x)}{X'_n(a_i)(x-a_i)}\,dx.$$

Telle est la valeur exacte de $\int f(x)\,dx$, qui est la valeur approchée de $\int \varphi(x)\,dx$.

On voit que cette valeur est de la forme

$$A_0\varphi(a_0)+A_1\varphi(a_1)+\ldots+A_{n-1}\varphi(a_{n-1}),$$

$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ désignant des quantités que l'on peut calculer une fois pour toutes. On comprend maintenant pourquoi on a choisi les limites $+1$ et -1 de l'intégrale que l'on avait à évaluer.

L'avantage de la méthode de Gauss est de fournir la même approximation que la méthode de Cotes, en calculant seulement n valeurs de $\varphi(x)$, tandis que la méthode de Cotes exigerait que l'on en calculât $2n-1$.

IX. — Nouvelle manière d'exposer la méthode de Gauss.

Considérons la fonction $\frac{1}{X_n^2(x^2-1)}$ et décomposons-la en éléments simples, X_n désignant toujours le polynôme de Legendre; appelons $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les racines de $X_n=0$;

nous aurons (p. 8, t. III)

$$\frac{1}{(x^2-1)X_n^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \sum \frac{d}{da_i}\left[\frac{1}{\theta(a_i)(a_i^2-1)}\frac{1}{x-a_i}\right],$$

$\theta(x)$ représentant $\frac{X_n^2}{(x-a_i)^2}$, par suite $\theta(a) = X'^2(a)$. Quand on effectue les calculs, les termes en $\frac{1}{x-a_0}, \frac{1}{x-a_1}, \dots$ disparaissent en vertu de l'équation (1) (p. 199) à laquelle satisfait X_n, et l'on a

$$\frac{1}{(x^2-1)X_n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \sum \frac{1}{\theta(a_i)(a_i^2-1)}\frac{1}{(x-a_i)^2},$$

formule que l'on peut écrire

$$\frac{1}{X_n(1-x^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) + \sum \frac{1}{X_n'^2(a_i)(1-a_i^2)(x-a_i)^2}.$$

Intégrons les deux membres par rapport à x, en observant que

$$\int_\infty^x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \log\frac{x+1}{x-1} = \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{x-z},$$

et nous aurons

$$\int_\infty^x \frac{dx}{X_n^2(1-x^2)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{x-z} - \sum\frac{1}{X_n'^2(a_i)(1-a_i^2)(x-a_i)};$$

multiplions par $\varphi(x)$ et prenons les résidus intégraux des deux membres, c'est-à-dire relativement à un cercle de rayon plus grand que un décrit de l'origine comme centre. En supposant $\varphi(x)$ fini dans ce cercle, nous aurons

$$\mathop{\mathcal{E}}\varphi(x)\int_\infty^x \frac{dx}{X_n^2(1-x^2)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(z)\,dz - \sum\frac{\varphi(a_i)}{X_n'^2(a_i)(1-a_i^2)};$$

on a donc approximativement

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(z)\,dz = 2\sum\frac{\varphi(a_i)}{X_n'^2(a_i)(1-a_i^2)},$$

et l'erreur est le résidu

$$\mathop{\mathcal{E}}\varphi(x)\int_x^x \frac{dx}{X_n^2(1-x^2)}.$$

[*Voir* HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 443 et suivantes. — CHRISTOFFEL, *Ueber die Gaussche Quadratur* (CRELLE, t. 55). — MEHLER, *Bemerkungen zur Theorie der mecanischen Quadraturen* (CRELLE, t. 63). — Gauss a fait connaître sa méthode en 1815 dans les Commentaires de la Société Royale de Göttingue.]

X. — Généralisation des polynômes X_n.

Posons

$$\theta(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\lambda (z-x)^n,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ désignant des constantes supérieures à -1 et $a, b, \ldots, l$ des constantes quelconques, n un exposant réel; posons, en outre,

$$\Theta(z) = (z-a)^{\alpha+1}(z-b)^{\beta+1} \ldots (z-x)^{n+1};$$

on pourra écrire

$$\Theta'(z) = \theta(z)[(\alpha+1)(z-b)\ldots(z-x)+\ldots+(n+1)(z-a)\ldots];$$

la quantité entre crochets peut se mettre sous la forme

$$F(x)+(z-x)F_1(x)+\ldots+(z-x)^\mu F_\mu(x),$$

$F, F_1, \ldots$ désignant des polynômes entiers et μ désignant le nombre des constantes $a, b, \ldots, l$; et l'on aura

$$\Theta'(z) = \theta(z)[F(x)+(z-x)F_1(x)+\ldots+(z-x)^\mu F_\mu(x)].$$

Posons encore

$$(z-a)^\alpha \ldots (z-l)^\lambda = f(z),$$

et nous aurons

$$\Theta'(z) = F(x)f(z)(z-x)^n + F_1(x)f(z)(z-x)^{n+1} + \ldots;$$

intégrons les deux membres entre deux limites qui soient deux des quantités $a, b, \ldots, l$; nous aurons

$$(1) \quad o = F(x)\int f(z)(z-x)^n dz + F_1(x)\int f(z)(z-x)^{n+1} dz + \ldots.$$

Or, si l'on fait

$$y = \int f(z)(z-x)^{n+\mu} dz,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = (n+\mu)\int f(z)(z-x)^{n+\mu-1} dz(-1),$$

. . . .

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = (n+\mu)(n+\mu-1)\ldots(n+1)\int f(z)(z-x)^n dz(-1)^\mu,$$

et, par suite, (1) devient

$$0 = \frac{1}{(n+1)\ldots(n+\mu)} F(x)\frac{d^\mu y}{dx^\mu} - \frac{1}{(n+2)\ldots(n+\mu)} F_1(x)\frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}} + \ldots.$$

Cette équation différentielle a alors pour intégrales les quantités

$$(2) \qquad \int f(z)(z-x)^{n+\mu} dz,$$

dans lesquelles les limites sont deux des quantités $a, b, \ldots, l$; si n est entier, on aura encore une intégrale en prenant l'une des expressions (2), mais en intégrant le long d'un contour fermé contenant le point x; cette intégrale ne sera, bien entendu, intéressante, que si n est négatif : elle se réduira alors à une dérivée de la fonction $f(z)$.

XI. — Remarques sur les fonctions trigonométriques.

Si l'on se propose de trouver un polynôme $\varphi_n(x)$ de degré n, tel que l'on ait

$$\int_{-1}^{+1} \theta(x)\varphi_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

pour tout polynôme $\theta(x)$ de degré $n-1$, on trouve (p. 186) que $\varphi_n(x)$ est de la forme

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n\psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une certaine fonction de x, et, pour que φ_n soit un polynôme, il faut qu'à un facteur constant près on ait

$$\varphi_n = \sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

φ_n est, à un facteur constant près, le polynôme $\cos n \arccos x$ et il satisfait à l'équation différentielle

$$(1)\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0,$$

qui a pour intégrale générale

$$A \cos n \arccos x + B \sin n \arcsin x,$$

A et B désignant deux constantes. On constate que l'expression

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

satisfait aussi à l'équation (1) et l'on en conclut cette formule de Jacobi

$$\frac{(-1)^n n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \sin n \arccos x.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces assertions.

XII. — Polynômes de M. Hermite.

Proposons-nous maintenant de trouver une fonction $\varphi(x)$ donnant lieu aux égalités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,x\,dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,x^{n-1}\,dx = 0.$$

En se laissant guider par le fil des analogies, on prendra

$$\varphi(x) = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n},$$

la fonction e^{-x^2} s'annulant pour $x = \pm\infty$ un nombre de fois infini. La fonction $\varphi(x)$ ainsi définie est le produit de e^{-x} par un polynôme entier de degré n dont les propriétés ont été étudiées par M. Hermite; on a, en effet,

$$\frac{de^{-x^2}}{dx} = -2xe^{-x^2},$$

$$\frac{d^2e^{-x^2}}{dx^2} = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$

$$\frac{d^3e^{-x^3}}{dx^3} = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et il est évident qu'en général on pourra poser $y = e^{-x^2}$ et

$$\frac{d^n y}{dx^n} = P_n e^{-x^2},$$

P_n désignant un polynôme entier en x du degré n. Or on a

$$\log y = -x^2, \qquad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -2x$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

et, en différentiant $n+1$ fois,

$$(1) \qquad \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}2x + (n+1)2\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

ou, divisant par e^{-x^2},

$$P_{n+2} + 2xP_{n+1} + 2(n+1)P_n = 0,$$

équation qui servira à former les polynômes P de proche en proche. Le théorème de Sturm est immédiatement applicable et montre que $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles; la for-

mule (1) peut encore s'écrire

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 2(n+1)y = 0,$$

y désignant $\dfrac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = \mathrm{P}_n e^{-x^2}$ et, par suite, on a

$$e^{-x^2}\left[\frac{d^2\mathrm{P}_n}{dx^2} - 4x\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} + \mathrm{P}_n(4x^2-2)\right] + 2xe^{-x^2}\left(\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} - 2x\mathrm{P}_n\right) + 2(n+1)e^{-x^2}\mathrm{P}_n = 0$$

ou bien

$$\frac{d^2\mathrm{P}_n}{dx^2} - 2x\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} + 2(n-1)\mathrm{P}_n = 0.$$

Les équations (2) et

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2(n-1)y = 0$$

pourront donc être intégrées complètement quand n sera un nombre entier.

L'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right) - 2(n-1)ye^{-x^2} = 0;$$

elle est ainsi mise sous la forme canonique et l'on en conclut (p. 173) cette propriété des fonctions P_n

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}_m\mathrm{P}_n e^{-x^2}\,dx = 0,$$

pour les valeurs de m différentes de n, ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}\,\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\,dx = 0.$$

D'ailleurs on a aussi, en intégrant par parties,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}_m\mathrm{P}_n e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}_m\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m\mathrm{P}_m}{dx^m}\,\frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}}\,dx;$$

si $m < n$, ce résultat est nul ; mais, si $m = n$, il est égal à $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^m P_m}{dx^m} e^{-x^2} dx$; or $\frac{d^m P_m}{dx^m} = \pm 1.2.3\ldots m.2^m$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m^2 e^{-x^2} dx = \pm 1.2.3\ldots m.2^m \sqrt{\pi} \qquad \text{(p. 136, t. III).}$$

Nous ferons remarquer, en terminant cet aperçu, que l'intégrale

$$Q_n = P_n \int \frac{e^{x^2} dx}{P_n^2}$$

est une autre solution de l'équation (3), en sorte que

$$AP_n + BQ_n = 0$$

est l'intégrale générale de cette équation.

Si l'on pose

$$R_n = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n},$$

on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-x} R_n \theta(x) dx = 0;$$

pour toutes les valeurs du polynôme $\theta(x)$ de degré inférieur à n, on aura d'ailleurs

$$R_n = x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} - \ldots,$$

$$x \frac{d^2 R_n}{dx^2} + (1-x) \frac{dR_n}{dx} + n R_n = 0,$$

$$\int_0^{\infty} R_m R_n e^{-x} dx = 0, \qquad \int_0^{\infty} R_n^2 e^{-x} dx = [\Gamma(n+1)]^2.$$

XIII. — Fonctions de Bessel et de Fourier.

Posons

$$(1) \quad \begin{cases} A_n = 1 + \dfrac{x}{1.(n+1)} + \dfrac{x^2}{1.2.(n+1)(n+2)} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{x^p}{1.2.3\ldots p(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} + \ldots; \end{cases}$$

nous aurons

$$\frac{d}{dx}x^n A_n = n x^{n-1} + \frac{x^n}{1} + \frac{x^{n+1}}{1.2(n+1)} + \ldots$$

et, par suite,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dx}x^n A_n = 1 + \frac{x}{1.(n+1)} + \frac{x^2}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots.$$

Il en résulte

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dx}x^n A_n = A_n,$$

équation qui peut s'écrire

$$(2) \qquad x\frac{d^2 A_n}{dx^2} + (n+1)\frac{dA_n}{dx} - A_n = 0.$$

Si l'on change x en $\frac{x^2}{4}$, on voit que, en posant

$$(3) \qquad B_n = 1 + \frac{x^2}{2.(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \ldots,$$

on a

$$(4) \qquad \frac{d^2 B_n}{dx^2} + \frac{2n+1}{x}\frac{dB_n}{dx} - B_n = 0.$$

La fonction B_n est ce que l'on appelle la *fonction de Fourier* ou de *Bessel*. Elle a été considérée, pour la première fois, par Fourier (*Théorie de la Chaleur*, Chap. VI); on la rencontre dans diverses questions d'Astronomie et de Physique. Si l'on fait $2n+1 = m$ et si l'on pose

$$C_m = 1 + \frac{x^2}{2(m+1)} + \frac{x^4}{2.4(m+1)(m+3)} + \ldots,$$

on aura

$$\frac{d^2 C_m}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dC_m}{dx} - C_m = 0;$$

le changement de x en $x\sqrt{-1}$ montre que la valeur de la série

$$(5)\qquad D_m = 1 - \frac{x^2}{2(m+1)} + \frac{x^4}{2.4(m+1)(m+3)} - \dots$$

satisfait à

$$(6)\qquad \frac{d^2 D_m}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dD_m}{dx} + D_m = 0.$$

Revenons à la fonction A_n : on a

$$e^{xz} = 1 + \frac{xz}{1} + \frac{x^2 z^2}{1.2} + \dots,$$

$$\left[e^{\frac{x}{z}} - 1 - \frac{x}{z} - \dots - \frac{x^{n-1}}{z^{n-1}\,1.2\dots(n-1)}\right] 1.2.3\dots n\,\frac{z^n}{x^n}$$
$$= 1 + \frac{x}{z(n+1)} + \frac{x^2}{z^2(n+1)(n+2)} + \dots.$$

Multiplions ces deux équations membre à membre, divisons par z et prenons les résidus relatifs au point 0 : nous aurons

$$\mathcal{L}\,\frac{z^{n-1}e^{x\left(z+\frac{1}{z}\right)}}{x^n}\,1.2.3\dots n = 1 + \frac{x^2}{1.(n+1)} + \dots = A_n(x^2) ;$$

donc $\frac{x^n A_n(x^2)}{1.2.3\dots n}$ est le coefficient de z^n dans le développement de $e^{x\left(z+\frac{1}{z}\right)}$ suivant les puissances entières de z ou, ce qui revient au même, $\frac{x^n B_n}{2.4\dots 2n}$ est le coefficient de z^n dans le développement de $e^{\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$. En résumé, les fonctions A, B, C, D sont liées entre elles par les relations

$$B_n(x) = A_n\left(\frac{x^2}{4}\right),$$

$$C_m(x) = C_{2n+1}(x) = B_n(x) = B_{\frac{m-1}{2}}(x),$$

$$D_m(x) = C_m(x\sqrt{-1}) = B_{\frac{m-1}{2}}(x\sqrt{-1}),$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
x\frac{d^2 A_n}{dx^2} &+ (n+1)\frac{dA_n}{dx} - A_n = 0,\\
x\frac{d^2 B_n}{dx^2} &+ (2n+1)\frac{dB_n}{dx} - xB_n = 0,\\
x\frac{d^2 C_m}{dx^2} &+ m\frac{dC_m}{dx} - xC_m = 0,\\
x\frac{d^2 D_m}{dx^2} &+ m\frac{dD_m}{dx} + xD_m = 0.
\end{aligned}$$

Ces équations pouvant se transformer facilement les unes dans les autres, nous nous bornerons à étudier la dernière à laquelle satisfait la fonction D_m. Écrivons-la ainsi :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{1}$$

En vertu des théories de M. Fuchs, le seul point critique à distance finie est le point 0 : l'équation fondamentale déterminante est

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha m = 0$$

ou

$$\alpha^2 + (m-1)\alpha = 0;$$

ses racines sont $\alpha = 0$, $\alpha = -(m-1)$; il y a donc une intégrale monodrome et une seconde intégrale monodrome si m est entier. La première intégrale est la fonction D_m : pour calculer l'autre, nous poserons

$$\begin{aligned}
y &= x^{-(m-1)}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots),\\
\frac{dy}{dx} &= -x^{-m}[(m-1) + a_1(m-2)x + a_2(m-3)x^2 + \ldots],\\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= x^{-(m+1)}[(m-1)m + a_1(m-2)(m-1)x + \ldots],
\end{aligned}$$

et, portant ces valeurs dans (1), nous égalerons à zéro les diverses puissances de x; nous aurons ainsi les a et par suite

$$y = x^{-(m-1)}\left[1 + \frac{x^2}{2.(m-3)} + \frac{x^4}{2.4.(m-3)(m-5)} + \ldots\right];$$

les deux intégrales distinctes de (1) ont donc le point à l'infini pour point singulier essentiel; elles ne sauraient donc être racines d'équations algébriques. La fonction D_m peut s'exprimer au moyen d'intégrales définies. En effet, on a

$$\int_0^\pi \cos^{2i} z \sin^m z \, dz$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(m+2)(m+4)\ldots(m+2i)} \int_0^\pi \sin^m z \, dz,$$

ainsi qu'on le vérifie bien facilement par l'intégration par parties; on en conclut, en changeant m en $m-1$,

$$\int_0^\pi \cos^{2i} z \sin^{m-1} z \, dz$$
$$= \frac{1.2.5\ldots(2i-1)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-1)} \int_0^\pi \sin^{m-1} z \, dz$$

et, par suite,

$$\frac{1}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-1)} = \frac{\displaystyle\int_0^\pi \cos^{2i} z \sin^{m-1} z \, dz}{\displaystyle 1.3.5\ldots(2i-1)\int_0^\pi \sin^{m-1} z \, dz}.$$

Si l'on porte cette valeur dans la formule

$$D_m = 1 - \frac{x^2}{2(m+1)} + \frac{x^4}{2.4.(m+1)(m+3)} - \ldots,$$

on trouve

$$D_m = \sum \pm \frac{x^{2i}}{1.2.3\ldots 2i} \frac{\displaystyle\int_0^\pi \cos^{2i} x \sin^{m-1} z \, dz}{\displaystyle\int_0^\pi \sin^{m-1} z \, dz}$$

ou bien

$$D_m \int_0^\pi \sin^{m-1} z \, dz = \int_0^\pi \cos(x \cos z) \sin^{m-1} z \, dz;$$

donc

$$(2) \qquad \int_0^{\pi} \cos(x \cos z) \sin^{m-1} z \, dz,$$

ne différant de D_m que par le facteur constant

$$\int_0^{\pi} \sin^{m-1} z \, dz.$$

est une intégrale de l'équation (1). Cette équation peut donc être intégrée au moyen d'intégrales définies. On peut poser

$$\cos z = u;$$

la formule (2) devient alors, au signe près et au facteur 2 près,

$$\int_0^1 \cos ux (1-u^2)^{\frac{m-2}{2}} du,$$

en sorte que, si l'on pose

$$(3) \qquad V_p = \int_0^1 \cos ux (1-u^2)^{p-1} du,$$

V_p sera une intégrale particulière de

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2p}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Les fonctions V_p sont exprimables en termes finis quand p est entier. En effet, l'intégration par parties, appliquée à la formule (3), donne

$$V_p = \int_0^1 \frac{\sin ux}{x} (1-u^2)^{p-2} u (2p-2) \, du$$

et, en répétant cette opération,

$$V_p = -\int_0^1 \frac{\cos ux}{x^2} (1-u^2)^{p-3} u^2 (2p-2)(2p-4) du$$
$$+ \int_0^1 \frac{\cos ux}{x^2} (1-u^2)^{p-2} (2p-2) du,$$

ce que l'on peut écrire

$$V_p = V_{p-1}\,\frac{2p-2}{x^2} + V_{p-1}\,\frac{(2p-2)(2p-4)}{x^2} - V_{p-2}\,\frac{(2p-2)(2p-4)}{x^2}$$

ou

$$x^2 V_p = V_{p-1}(2p-2)(2p-3) - V_{p-2}(2p-2)(2p-4).$$

Les fonctions V sont, comme l'on voit, des fonctions de Sturm ; d'ailleurs on a

$$V_1 = \int_0^1 \cos ux\,du = \frac{\sin x}{x},$$

$$V_2 = \int_0^1 \cos ux(1-u^2)\,du = \frac{\sin x - 2x\cos x}{x^3},$$

ce qui permet de calculer V_p de proche en proche, et l'on voit que l'équation (4), et par suite (1), ont pour m pair une intégrale exprimable en termes finis. L'autre le sera alors au moyen de quadratures. On peut donner une autre forme aux fonctions V_p ; si en effet, dans la formule (3), on fait $ux = v$, on a

$$V_p = \int_0^x \cos v(x^2 - v^2)^{p-1}\,\frac{dv}{x^{2p-1}}$$

et, en intégrant par parties,

$$V_p = \frac{p-1}{x^{2p-1}} \int_0^x \sin v(x^2 - v^2)^{p-2}\,2v\,dv.$$

Posant $U_p = \dfrac{V_p x^{2p-1}}{p-1}$, on a

$$U_p = \int_0^x \sin v(x^2 - v^2)^{p-2}\,2v\,dv ;$$

faisant ensuite $v^2 = u$, on a

$$U_p = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{u}\,(x^2 - u)^{p-2}\,du ;$$

on a donc (p. 138, t. III)

$$\frac{U_p}{1.2.3\ldots(p-2)} = \int_0^{x^2}\int_0^{x^2}\ldots \sin\sqrt{x^2}\,dx^2\,dx^2\ldots,$$

le nombre des intégrations étant $p - 1$; donc

$$U_2 = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{x^2}\,dx^2 = \int_0^{x} 2x\sin x\,dx,$$

$$U_3 = 4\int_0^{x} x\int_0^{x} x\sin x\,dx^2,$$

$$U_4 = 8\int_0^{x} x\int_0^{x} x\int_0^{x} x\sin x\,dx^3,$$

. . . . :

d'ailleurs $U_1 = \sin x$.

On a donc ainsi un nouveau moyen de calculer sous forme finie l'intégrale de l'équation (1). Ces remarques sont de M. Hermite. (Consulter les Ouvrages de M. Neumann, 1867, Lomel, 1868, *Sur les fonctions de Bessel et de Fourier*, un Mémoire de M. Heine, *Journal de Crelle*, t. 60; la Thèse de M. Nicolas, 1882, insérée dans les *Annales de l'École Normale*.)

XIV. — Équation de Riccati.

On appelle ainsi l'équation (p. 62)

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m \qquad \text{ou} \qquad a\frac{dy}{dx} + a^2y^2 = abx^m.$$

Elle s'intègre, comme nous allons voir, à l'aide des transcendantes de Bessel. Si, en effet, on pose $u = e^{\int ay\,dx}$ ou

$$ay = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad ab = A,$$

on trouve

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - Ax^m u = 0 :$$

telle est la transformée obtenue par Euler. Posons

$$x^p = kt,$$

nous aurons

$$\frac{p^2}{k^2} x^{2p-2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{p(p-1)}{k} x^{p-2} \frac{du}{dt} - A x^m u = 0;$$

posant alors $m = 2p - 2$, $p = \frac{m+2}{2}$, on a, en divisant par x^m,

$$\frac{p^2}{k^2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{p(p-1)}{k} x^{-p} \frac{du}{dt} - A u = 0.$$

Observant que $x^{-p} = \frac{1}{kt}$, $p = \frac{m+2}{2}$, il vient

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{t} \frac{du}{dt} - \frac{k^2 A}{p^2} u = 0:$$

on fera alors $\frac{k^2 A}{p^2} = \frac{4k^2 A}{(m+2)^2} = \pm 1$, et l'on sera ramené à l'une des équations

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{t} \frac{du}{dt} \pm u = 0,$$

qui définissent les fonctions de Bessel ou de Fourier. Donc, toutes les fois que $\frac{m}{m+2}$ sera un nombre pair, on pourra intégrer par les fonctions algébriques et trigonométriques l'équation de Riccati. Si l'on pose

$$\frac{m}{m+2} = \pm 2K,$$

on en tire

$$m = \pm 2 \frac{2K}{1-2K} = \frac{\pm 4K}{1 \mp 2K},$$

telle est la forme que doit affecter m pour que l'on puisse intégrer en termes finis.

Quand on connaîtra u, on aura y par la formule

$$y = \frac{1}{a}\frac{du}{u\,dx} = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\log u,$$

formule qui ne renferme plus qu'une seule constante arbitraire. D'ailleurs l'équation de Riccati est une de celles que l'on sait intégrer quand on en connaît une solution (p. 62).

On ramène à l'équation de Riccati et par suite on intègre au moyen des fonctions de Bessel :

1° L'équation

$$\frac{dy}{dx} - by^2x^m - ax^{2n} = 0;$$

en posant $z = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, elle devient alors

$$\frac{dy}{dz} = (n+1)^p a z^p + by^2, \qquad p = \frac{n-m}{n+1}.$$

2° M. Fouret a trouvé que l'équation

$$\text{(A)} \qquad (\mathrm{H}+\mathrm{L})(x\,dy - y\,dx) - \mathrm{M}\,dy + \mathrm{N}\,dx = 0,$$

où H est homogène de degré $p-2$ et L, M, N homogènes de degré p, se ramène à l'équation de Riccati en changeant x en $\dfrac{t}{z}$ et y en $\dfrac{1}{z}$, ou encore en changeant x en $\dfrac{\cos\theta}{u}$ et y en $\dfrac{\sin\theta}{u}$.

Quand $\mathrm{H} = 0$, l'équation (A) devient linéaire par une transformation de coordonnées rectilignes en coordonnées polaires.

XV. — Étude des fonctions de Gauss.

L'intégration de l'équation très générale, où A, B, ... sont des constantes,

$$(1) \qquad (\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C})\frac{d^2y}{dx^2} + (\mathrm{D}x + \mathrm{E})\frac{dy}{dx} + \mathrm{F}y = 0,$$

se ramène à l'étude d'une série remarquable dont les princi-

pales propriétés ont été signalées par Gauss; nous allons nous y arrêter quelques instants.

Au moyen d'une substitution linéaire $x = az + b$, on transforme cette équation en

$$[Aa^2z^2 + (2Aab + aB)z + Ab^2 + Bb + C]\frac{d^2y}{dz^2} + (M'z + N')\frac{dy}{dz} + P'y = 0,$$

M', N', P' désignant de nouvelles constantes. Or, si l'on choisit a et b de telle sorte que

$$Ab^2 + Bb + C = 0, \qquad Aa^2 = -(2Aab + aB),$$

sans prendre $a = 0$, et si l'on remet x à la place de z, l'équation proposée prendra la forme

$$(2) \qquad (x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + (Mx + N)\frac{dy}{dx} + Py = 0,$$

M, N, P désignant encore des constantes d'ailleurs quelconques, comme A, B, C, D, E, F.

Cette équation a pour points singuliers possibles les points 0, 1 et ∞ : l'équation fondamentale déterminante est, pour le point 0,

$$\alpha(\alpha - 1) + N\alpha = 0$$

et pour le point 1,

$$\alpha(\alpha - 1) + (M + N)\alpha = 0;$$

nous pourrons donc développer, suivant les puissances entières et positives de x, une intégrale de l'équation (2); le rayon de convergence sera au moins égal à un. Pour qu'il y ait une autre intégrale monodrome autour de l'origine, il faut que N soit un nombre entier : cette intégrale sera aussi monodrome autour du point 1, si M est entier.

Cherchons l'intégrale monodrome autour de l'origine; à

cet effet, posons

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots;$$

portons ensuite ces valeurs dans l'équation (2); nous devrons avoir l'identité

$$\begin{aligned}[1.2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 \\ + \ldots + (n-1)na_nx^{n-2}\ldots](x^2-x) \\ + (a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots)(Mx+N) \\ + (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)P = 0.\end{aligned}$$

En égalant à o le coefficient de x^n, on a

$$a_n P + n a_n M + (n+1) a_{n+1} N + n(n-1) a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0$$

ou

$$a_{n+1} = a_n \frac{P + Mn + n(n-1)}{n(n+1) - (n+1)N} = a_n \frac{n^2 + n(M-1) + P}{n^2 - (N-1)n - N};$$

a_0 est d'ailleurs arbitraire. L'équation précédente peut s'écrire

$$a_{n+1} = a_n \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{n+\gamma},$$

en posant

$$M - 1 = \alpha + \beta, \qquad P = \alpha\beta, \qquad N = -\gamma.$$

Si l'on fait alors $a_0 = 0$, on voit que la valeur de la série

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta-1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots \end{aligned} \right.$$

est une intégrale de l'équation

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}(x^2-x) + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta\gamma = 0.$$

La série (3) a reçu le nom de série *hypergéométrique;* elle jouit de propriétés curieuses que nous allons étudier. Mais d'abord, pour en finir avec l'équation (4), nous ferons observer que, si $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est une solution,

$$x^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$$

est une autre solution, ainsi qu'on peut le vérifier en posant $y = x^{\mu} z$, et en développant en série l'intégrale de l'équation en z. L'intégrale de (1) la plus générale est donc exprimable au moyen de deux séries.

La valeur de la série hypergéométrique (3) peut être mise sous la forme d'une intégrale définie dans un grand nombre de cas, ce qui fournit une nouvelle forme de l'intégrale de l'équation (4).

Tous les calculs que nous allons faire supposent satisfaites certaines conditions de convergence et de continuité dont le lecteur s'apercevra sans peine, et sur lesquelles nous n'insisterons pas.

On a

$$\begin{aligned}(1-ux)^{-\alpha} = 1 &+ \frac{\alpha}{1}\, ux + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\, u^2x^2 + \ldots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2.3\ldots n}\, u^n x^n + \ldots.\end{aligned}$$

Multiplions par $u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$ et intégrons de 0 à 1 : nous aurons, en appelant $B(p, q)$ l'intégrale eulérienne de première espèce,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (1-ux)^{-\alpha}(1-u)^{q-1} u^{p-1}\, du \\ &= B(p, q) + \frac{\alpha}{1}\, x B(p+1, q) + \ldots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2.3\ldots n}\, x^n B(p+n, q) + \ldots;\end{aligned}$$

or on a, en appelant $\Gamma(p)$ l'intégrale eulérienne de deuxième

espèce,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$B(p+1, q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p}{p+q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$B(p+2, q) = \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

....

La formule précédente pourra alors se mettre sous la forme

$$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-ux)^{-\alpha}(1-u)^{q-1}u^{p-1}\,du$$
$$= 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{p}{p+q}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}x^2 + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)}{1.2.3\dots n}\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{(p+q)(p+q+1)\dots(p+q+n-1)}x^n + \dots.$$

En faisant alors $p = \beta$, $q = \gamma - \beta$, on a

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-ux)^{-\alpha}u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du = F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

il en résulte que

$$(5) \qquad \int_0^1 (1-ux)^{-\alpha}u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du$$

est une intégrale de l'équation (4).

En particulier, pour $\gamma = 1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, on voit que l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}(x^2 - x) + \frac{dy}{dx}(2x-1) + \frac{1}{4}y = 0$$

a pour solution

$$\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-ux)^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

ou

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-ux)}}.$$

L'équation (6) peut se mettre sous la forme canonique

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2-x)\frac{dy}{dx}\right]+\frac{1}{4}y=0,$$

et l'on voit que, si $f(x)$ est solution, $f(1-x)$ est solution aussi, en sorte que l'intégrale complète de (6) est, en désignant par A et B des constantes,

$$A\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-ux)}}+B\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-\overline{1-x}\,u)}}$$

ou, en posant $u=z^2$,

$$A\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-xz^2)}}+B\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\overline{1-x}\,z^2)}}.$$

Liouville, sous le pseudonyme de Besge, a fait connaître dans son Journal des équations remarquables qui se ramènent à la précédente. Si, en effet, dans

$$(a) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{y}{(e^t+e^{-t})^2},$$

on pose

$$t=\log\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

elle devient

$$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dy}{dx}-xy=0,$$

laquelle se réduit à

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(2x-1)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}y=0,$$

quand on pose $x=\sqrt{t}$ et que l'on change ensuite t en x.

Si dans l'équation (a) on change t en at ou en $at\sqrt{-1}$,

on voit que l'on peut intégrer les équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a^2 y}{(e^{at} + e^{-at})^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a^2 y}{4\cos^2 at}$$

et, par suite, aussi

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a^2 y}{4\sin^2 at}.$$

XVI. — Intégration d'une équation remarquable par les fonctions de Gauss.

Liouville a remarqué (*Journal de l'École Polytechnique*, XXI[e] Cahier, p. 185) que l'équation linéaire

$$s\frac{d^2y}{dx^2} + (r + qx)\frac{dy}{dx} + (p + nx + mx^2)y = 0$$

pouvait se ramener à l'équation étudiée au paragraphe précédent en posant

$$y = z e^{\int(\alpha+\beta x)dx},$$

z désignant une nouvelle fonction inconnue et α, β deux constantes. En effectuant le changement de variable, on trouve

$$\begin{aligned} s\frac{d^2z}{dx^2} &+ [(2s\beta + q)x + 2\alpha s + r]\frac{dz}{dx} \\ &+ z[x^2(s\beta^2 + \beta q + m) + x(2\alpha\beta s + \alpha q + \beta r + n) \\ &\qquad + s\alpha^2 + s\beta + r\alpha + p] = 0; \end{aligned}$$

or on peut toujours disposer de α et β de manière à faire disparaître les termes en x^2 et en x dans le coefficient de z : l'équation se ramène alors à l'un des types étudiés précédemment.

L'équation

$$(mx^3 + nx^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (px^2 + qx)\frac{dy}{dx} + ry = 0$$

se ramène au type étudié au paragraphe précédent en faisant $x = \frac{1}{t}\cdot$ (Liouville, *loc. cit.*).

XVII. — Propriétés de la fonction F.

Si dans $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ on convient d'appeler *paramètres* les quantités α, β, γ, et si l'on appelle fonctions *contiguës* deux fonctions ne différant entre elles que par un paramètre, ce paramètre étant dans l'une de ces fonctions égal au paramètre correspondant dans l'autre augmenté de un, on pourra énoncer le théorème suivant :

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *et deux quelconques de ses contiguës sont liées entre elles par une relation linéaire et homogène ayant pour coefficients des polynômes du premier degré en* x.

Nous établirons seulement une des quinze relations que fournit l'application directe de ce théorème. Nous aurons

$$\begin{aligned}(a+bx)F(\alpha-1, \beta, \gamma, x)+(a'+b'x)F(\alpha, \beta, \gamma, x)\\ +(a''+b''x)F(1+\alpha, \beta, \gamma, x)\\ =\sum x^n(pn^3+qn^2+rn+s).\end{aligned}$$

p, q, r, s ont des valeurs indépendantes de x et n, mais contenant α, β, γ. En annulant p, q, r, s, on aura quatre équations pour déterminer a, a', b, b', c, c' ou les rapports de ces quantités; l'un d'eux sera même arbitraire, mais le calcul montre que l'on doit supposer $a''=0$. C. Q. F. D.

On peut remarquer que

$$(1+x)^n = F(-n, 1, 1, -x),$$

$$e^x = \lim F\left(1, m, 1, \frac{x}{m}\right),$$

pour $m=\infty$,

$$\log(1+x) = xF(1, 1, 2, x),$$

$$(1-x)^\alpha F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right);$$

on vérifie également la relation

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)},$$

et par suite, en changeant γ en $\gamma+1$, $\gamma+2$, ...,

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+2, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma-\alpha-\beta+1)},$$

....

En multipliant ces formules membre à membre, on a

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha)\ldots(\gamma-\alpha+n-1)(\gamma-\beta)\ldots(\gamma-\beta+n-1)}{(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)(\gamma-\alpha-\beta+1)\ldots(\gamma-\beta-\alpha+n)}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)} &= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)\Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(\gamma+n+1)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)\Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n+1)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+n+1)};\end{aligned}$$

si dans cette formule on fait $n = \infty$, on trouve

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

relation remarquable entre les fonctions F et les fonctions eulériennes.

La série très générale de Gauss est un cas particulier de la suivante, dite série de Heine (*Journal de Crelle*, t. 32),

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}x + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}x^2 + \ldots.$$

On a, en effet,

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, 1, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

on a aussi

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx) + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{1-q^\gamma} x\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x).$$

XVIII. — Emploi des dérivées à indices quelconques.

Considérons l'équation à laquelle satisfont les polynômes de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

et que l'on sait intégrer quand n est entier. Supposons maintenant n quelconque et posons (μ désignant un indice quelconque entier ou non)

$$y=\frac{d^\mu z}{dx^\mu};$$

elle deviendra

$$(1-x^2)\frac{d^{\mu+2}z}{dx^{\mu+2}}-2x\frac{d^{\mu+1}z}{dx^{\mu+1}}+n(n+1)\frac{d^\mu z}{dx^\mu}=0.$$

Prenons la dérivée d'ordre $-\mu$ des deux membres : nous aurons (t. III, p. 493)

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+2\mu x\frac{dz}{dx}-\mu(\mu+1)z-2x\frac{dz}{dx}+2\mu z+n(n+1)z=0;$$

on réduit cette équation à

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+2nx\frac{dz}{dx}=0,$$

en posant

(1) $$n(n+1)-\mu^2-\mu=0 \qquad \text{ou} \qquad \mu=n+1,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx}=k(x^2-1)^n,$$

k désignant une constante, et par conséquent

$$y=k\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

L'équation (1) donne une autre valeur de μ qui fournirait une seconde valeur de y, qui nous est d'ailleurs inutile, notre but étant seulement de montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(x^2-1)^n$

est une solution de l'équation proposée même quand n cesse d'être entier, mais on ne voit pas très bien à partir de quelle limite il convient de prendre la dérivée en question; pour le voir, reportons-nous au calcul fait page 200 : nous y voyons que l'expression

$$\frac{1}{z^n}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

satisfait à l'équation (1), et cela quel que soit n, pourvu que le contour d'intégration soit tel que

$$\int\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-x)^{n+2}}\right]dz$$

soit nul : il suffit pour cela que le contour se compose de deux lacets ayant même entrée et pour points critiques x et l'un des points -1, ou $+1$.

Une remarque analogue peut être faite au sujet d'un grand nombre d'autres équations : ainsi nous avons vu que le polynôme

$$P_n = e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

satisfait à l'équation (p. 214)

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2(n-1)y=0.$$

L'expression

$$e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

continuera à être une solution particulière de la même équation quand n deviendra quelconque. La valeur de la dérivée qu'il faut prendre est, à un facteur constant près,

$$\int\frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}\,dz,$$

prise le long d'un lacet ayant son origine à l'infini et le point x pour point critique.

XIX. — Équation de M. Moutard.

M. Moutard a étudié l'équation très générale

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\left[2h+\frac{d\log\varpi(x)}{dx}\right]\frac{dy}{dx}-\lambda y=0,$$

ϖ et λ désignant des fonctions de x et h une constante. Si l'on pose

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\lambda y_1, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\lambda\dfrac{dy_1}{dx}+y_1\dfrac{d\lambda}{dx}, \end{cases}$$

cette équation devient

$$y=\frac{dy_1}{dx}+y_1\left(2h+\frac{d\log\varpi\lambda}{dx}\right)$$

et, en différentiant par rapport à x,

$$\lambda y_1=\frac{d^2y_1}{dx^2}+\frac{dy_1}{dx}\left(2h+\frac{d\log\varpi\lambda}{dx}\right)+y_1\frac{d^2\log\varpi\lambda}{dx^2},$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \frac{d^2y_1}{dx^2}+\frac{dy_1}{dx}\left(2h+\frac{d\log\varpi\lambda}{dx}\right)-y_1\lambda_1=0,$$

formule où l'on a posé

$$(4)\qquad \lambda_1=\lambda-\frac{d^2\log\varpi\lambda}{dx^2}.$$

L'équation (1) se transforme donc dans (3), qui est de même forme, par la substitution (2). Opérant sur (3) comme on a opéré sur (1), on la transformera en

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}+\frac{dy_2}{dx}\left(2h+\frac{d\log\varpi\lambda\lambda_1}{dx}\right)-y_2\lambda_2=0,$$

$$\lambda_2=\lambda_1-\frac{d^2\log\varpi\lambda\lambda_1}{dx^2}$$

et finalement, je suppose, en

$$(5)\qquad \frac{d^2 y_n}{dx^2} + \frac{dy_n}{dx}\left(2h + \frac{d\log\varpi\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}{dx}\right) - y_n\lambda_n = 0.$$

Si l'on avait $\lambda_n = 0$, y_n s'obtiendrait au moyen d'une quadrature et la valeur de y elle-même s'obtiendrait par une suite de quadratures. (Moutard, *Comptes rendus*, 1875.)

Pour faire une application des principes précédents, nous considérerons l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left(2h + \frac{d\log c}{dx}\right) - \frac{n(n+1)}{x^2}y = 0,$$

c désignant une constante, laquelle fournit la transformée

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx}\left(2h + \frac{d\log\frac{1}{x^2}}{dx}\right) = 0$$

ou

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx}\left(2h - \frac{2}{x}\right) = 0,$$

et cela en posant

$$y_1 = \frac{x^2}{n(n+1)}y;$$

on tire de là

$$\frac{dy_1}{dx} = Cx^2 e^{-2hx}$$

ou

$$y_1 = \frac{Ce^{-2hx}}{h}\left(x^2 + \frac{2x}{h} + a\right),$$

a et C désignant des constantes; on en déduit y.

Le cas où $\lambda_n = 0$ n'est pas le seul où l'équation de M. Moutard soit intégrable, et il est clair que, pour que cette équation soit intégrable, il suffit que l'une de ses transformées (5) le soit elle-même.

XX. — Équations de Laplace.

Nous donnerons ce nom aux équations linéaires sans second membre dont les coefficients sont fonctions linéaires

de la variable x, parce qu'on peut les intégrer au moyen d'intégrales définies, à l'aide d'une méthode imaginée par Laplace.

Considérons l'équation

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n}(a_n x + b_n) + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(a_{n-1} x + b_{n-1}) + \ldots + y(a_0 x + b_0) = 0,$$

dans laquelle $a_0, a_1, \ldots; b_0, b_1, \ldots$ sont des constantes. Si l'on pose

$$y = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha,$$

cette équation prend la forme

$$x \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha) e^{\alpha x} [a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_0] d\alpha$$
$$+ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha) e^{\alpha x} [b_n \alpha^n + b_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + b_0] d\alpha = 0;$$

en posant

$$\varphi(\alpha)(a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_0) = \mathrm{G}(\alpha),$$
$$\varphi(\alpha)(b_n \alpha^n + b_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + b_0) = \mathrm{H}(\alpha),$$

cette formule devient

$$x \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \mathrm{G}(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \mathrm{H}(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha = 0$$

ou, en intégrant par parties,

$$\Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1} \mathrm{G}(\alpha) e^{\alpha x} + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} [\mathrm{H}(\alpha) - \mathrm{G}'(\alpha)] e^{\alpha x} d\alpha = 0.$$

On satisfera à cette équation en prenant

$$(2)\qquad \mathrm{G}(\alpha_1) e^{\alpha_1 x} = 0,$$

$$(3)\qquad \mathrm{G}(\alpha_0) e^{\alpha_0 x} = 0,$$

$$(4)\qquad \mathrm{H}(\alpha) - \mathrm{G}'(\alpha) = 0.$$

A cet effet, on pourra d'abord intégrer l'équation

$$G'(\alpha) - H(\alpha) = 0$$

ou

$$\frac{d}{d\alpha}\varphi(\alpha)(a_n\alpha^n + \ldots + a_0) = \varphi(\alpha)(b_n\alpha^n + \ldots + b_0),$$

qui est linéaire et du premier ordre en $\varphi(\alpha)$; elle donne, en posant $a_n\alpha^n + \ldots + a_0 = A$, $b_n\alpha^n + \ldots + b_0 = B$,

$$A\frac{d\varphi}{d\alpha} + \varphi(A' - B) = 0$$

ou

$$\varphi(\alpha) = Ce^{\int(B-A')\frac{d\alpha}{A}},$$

C désignant une constante. Quant aux équations (2) et (3), on y satisfera en prenant pour α_1 et α_0 deux racines quelconques de l'équation $A = 0$.

La méthode de Laplace tombera en défaut toutes les fois que l'équation $A = 0$ sera de degré 0 ou 1. Il y a plusieurs moyens de tourner la difficulté : si A est du premier degré, on pourra prendre pour α_1 la racine de $A = 0$ et pour α_0 la valeur $-\infty$; si A est une constante, on transformera l'équation proposée en posant

$$y = ze^{px},$$

p désignant une constante. Alors on aura

$$\frac{dy}{dx} = e^{px}\left(\frac{dz}{dx} + pz\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{px}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2p\frac{dz}{dx} + p^2\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{pz}\left(\frac{d^nz}{dx^n} + \frac{n}{1}p\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + p^n\right);$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient une transformée de la forme

$$\frac{d^nz}{dx^n}(\beta_nx + \gamma_n) + \ldots + z(\beta_0x + \gamma_0) = 0,$$

dans laquelle les β et les γ sont des constantes : c'est encore une équation de Laplace à laquelle on peut appliquer les procédés que nous venons d'indiquer. (*Voir* un Mémoire de M. Spitzer, inséré au Tome 54 du *Journal de Crelle*.)

La méthode précédente peut s'appliquer aux équations qui définissent les fonctions de Bessel et de Fourier et par suite à l'équation de Riccati modifiée.

XXI. — Emploi des dérivées à indices quelconques pour abaisser les équations linéaires.

Considérons l'équation linéaire

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^n} + \ldots + P_0 y = 0,$$

dans laquelle P_i désigne un polynôme entier de degré i en x. Essayons d'y satisfaire en posant

$$y = \frac{d^\mu z}{dz^\mu},$$

ce qui la transforme en

$$P_n \frac{d^{n+\mu} z}{dx^{n+\mu}} + P_{n-1} \frac{d^{n+\mu-1} z}{dx^{n+\mu-1}} + \ldots + P_0 \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = 0.$$

Prenons les dérivées d'ordre $-\mu$ des deux membres; nous aurons

$$(2) \qquad A_n \frac{d^n z}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + A_0 z = 0.$$

Dans cette formule on a

$$A_0 = P_0 - \frac{\mu}{1} P'_1 + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} P''_2 - \ldots \pm \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}{1.2.3\ldots n} P^n_n,$$

$$A_1 = P_1 - \frac{\mu}{1} P'_2 + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} P''_3 - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_n = P_n;$$

si l'on pose alors $A_0 = 0$, on aura une équation algébrique en

μ qui permettra d'abaisser l'équation (2) en prenant $\frac{dz}{dx}$ pour inconnue.

Si nous appliquons cette méthode à l'équation

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

l'équation en μ se réduit ici à $\mu + 1 = 0$ et l'équation en z devient

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{x}, \qquad z = c \log x + c',$$

$$y = cx \log x + c'' x,$$

c, c', c'' désignant des constantes.

Une légère modification de la méthode précédente permet d'intégrer l'équation

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{p}{1} F'(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \\ & \qquad + \frac{p(p-1)}{1.2} F''(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots \\ & \qquad + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n} F^n(x) y = 0. \end{aligned} \right.$$

Il suffit, en effet, de poser

$$y = \frac{d^\mu z}{dx^\mu},$$

et l'on a, en différentiant $-\mu$ fois,

$$A_n \frac{d^n z}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + A_0 z = 0,$$

$$A_n = F^n(x),$$

$$A_{n-1} = F^{n-1}(x) \frac{p-\mu}{1},$$

$$A_{n-2} = F^{n-2}(x) \frac{(p-\mu)(p-\mu-1)}{1.2},$$

$$A_{n-3} = F^{n-3}(x) \frac{(p-\mu)(p-\mu-1)(p-\mu-2)}{1.2.3},$$

....;

si donc on prend $p - \mu = n$ ou $\mu = p - n$, on a

$$F(z)\frac{d^n z}{dx^n} + \frac{n}{1}F'(z)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + F^{n}(x)z = 0$$

ou

$$\frac{d^n}{dx^n}[F(x)z] = 0,$$

c'est-à-dire

$$F(x)z = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant un polynôme arbitraire de degré $n-1$. Il en résulte que, si $a, b, \ldots, l$ sont les racines de $F(x) = 0$, on pourra écrire

$$z = A(x-a)^{-1} + B(x-b)^{-1} + \ldots + L(x-l)^{-1},$$

A, B, ..., L désignant des constantes arbitraires et, par suite, en différentiant $\mu = p - n$ fois,

$$y = A'(x-a)^{n-p-1} + B'(x-b)^{n-p-1} + \ldots + L'(x-l)^{n-p-1}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation proposée. Cette méthode est encore applicable quand $F(x) = 0$ a des racines multiples.

La méthode précédente permet, comme on le voit, d'intégrer l'équation de Gauss au moyen d'intégrales définies.

XXII. — Intégration d'une classe particulière d'équations.

La méthode que nous venons d'indiquer pour intégrer l'équation (3) du paragraphe précédent n'a pas en apparence une grande importance, eu égard au résultat obtenu qu'il était peut-être facile de deviner; mais elle nous permet d'aller plus loin.

Désignons, pour abréger l'écriture, par $\theta_m^p[F(x), y]$ l'expression

$$F(x)\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{p}{1}F'(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{p(p-1)}{1.2}F''(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2.3\ldots m}F^m(x)y,$$

et considérons l'équation différentielle linéaire

$$\theta_m^p[F(x).y] + \theta_n^q[G(x),y] + \ldots = 0, \tag{1}$$

dans laquelle m, n, ..., p, q, ... désignent des constantes et F, G, ... des polynômes de degrés m, n, ... respectivement. Supposons les nombres m, n, p, q, ... assujettis à satisfaire aux équations

$$m - p = n - q = \ldots = \alpha;$$

posons

$$y = \frac{d^{-\alpha} z}{dx^{-\alpha}}, \qquad z = \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}; \tag{2}$$

nous pourrons mettre (1) sous la forme

$$\frac{d^m}{dx^m}[F(x)z] + \frac{d^n}{dx^n}[G(x)z] + \ldots = 0,$$

et, si l'on suppose $m > n > \ldots$, on pourra intégrer un certain nombre de fois et abaisser ainsi l'équation proposée. Supposons, par exemple, les quantités m, n au nombre de deux et $m = n + 1$; on aura

$$\frac{d}{dx}[F(x)z] + zG(x) = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant un polynôme arbitraire de degré $n - 1$: cette équation peut s'écrire

$$F(z)\frac{dz}{dx} + z[G(x) + F'(x)] = \varphi(x)$$

et s'intègre par des quadratures; z une fois connu, on en déduit y.

XXIII. — Équation de MM. Scherck et Lobatto.

L'équation (de Laplace, p. 236)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy \tag{1}$$

a été étudiée par M. Scherck (*Journal de Crelle*, t. X) et

par M. Lobatto (*id.*, t. XVII); voici la solution de M. Lobatto : il considère l'équation plus générale

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy + a, \tag{2}$$

a désignant une constante, et il remarque que l'on y satisfait en posant

$$y = a\alpha \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} e^{zx\alpha}\, dz,$$

α désignant une racine de l'équation binôme

$$\alpha^{n+1} - 1 = 0.$$

Or la différence de deux intégrales particulières de (2) est une intégrale de (1); donc

$$y = a \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} (e^{zx} - \alpha e^{zx\alpha})\, dz$$

sera une intégrale de (1); les autres s'obtiendront en attribuant à α ses n valeurs imaginaires, de sorte que la valeur générale de y sera

$$y = \sum \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} (e^{zx} - \alpha e^{zx\alpha})\, dz,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines de l'équation $\alpha^{n+1} = 1$. (*Voir* un Mémoire de Jacobi, *Journal de Crelle*, t. X.)

XXIV. — Équation de M. Kummer.

M. Kummer a résolu l'équation plus générale

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y \tag{1}$$

(*Journal de Liouville*, 1re série, t. IV, et *Crelle*, t. XIX) : à cet effet, il la différentie et trouve

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = m x^{m-1} y + x^m \frac{dy}{dx},$$

on y satisfait en posant

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\,du, \qquad \frac{d^{n+1}\psi}{dx^{n+1}} = x^{m-1}\psi;$$

et l'on est ramené à une équation de même forme dans laquelle l'exposant de x est diminué d'une unité et à des quadratures. (Le cas où $m = 2$ avait déjà été traité par M. Kummer dans le *Journal de Crelle*, t. XII, et par M. Lobatto, même Recueil, t. XVII.)

EXERCICES ET NOTES.

1. On a, en appelant X_n le polynôme de Legendre,

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^m = \frac{1}{m+1} + \frac{3m}{(m+1)(m+2)} X_1 + \frac{5m(m-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)} X_2 + \frac{7m(m-1)(m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} X_3 + \ldots,$$

$$\log\frac{2}{1-x} = 1 + \frac{3}{1.2} X_1 + \frac{5}{2.3} X_2 + \frac{7}{3.4} X_3 + \ldots.$$

(Bauer, *Journal de Crelle*, t. LVI.)

2. En appelant toujours X_n le polynôme de Legendre, on a

$$X_n + X_{n+1} = X_0 \int_{-1}^{x} X_n\,dx + X_1 \int_{-1}^{x} X_{n-1}\,dx + \ldots + X_n \int_{-1}^{x} X_0\,dx.$$

(Catalan, *Académie de Belgique*, 1880.)

3. Ayant mis un polynôme $F(x)$ sous la forme

$$A_m X_m + A_{m-1} X_{m-1} + \ldots + A_0 X_0 = F(x),$$

A_0, A_1, ... désignant des constantes et X_0, X_1, ... des polynômes de Legendre, le nombre des racines de $F(x) = 0$ égales ou supérieures à un est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$A_m, \quad A_{m-1}, \quad \ldots, \quad A_0.$$

(Laguerre, *Comptes rendus*, 1881.)

4. Soit, en appelant a_0, a_1, ... des coefficients constants,

$$\varphi(y) = \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + \ldots + \frac{a_n}{y^n} + \ldots;$$

on peut trouver une fonction $f(x)$, telle que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{y-x} = \varphi(y).$$

(NIEMÖLLER. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1879.)

5. Si l'on forme les dérivées successives de la fonction $e^{\frac{1}{x}}$; on trouve

$$\frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = \mathrm{Y}_{n-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2n}}.$$

Y_n désignant un polynôme du degré $n-1$ en x; prouver que ce polynôme satisfait à une équation du second ordre linéaire et étudier cette équation. On l'intégrera même dans le cas où n n'est pas entier.

6. Si l'on veut une fonction $\varphi(\alpha)$, telle que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x\sqrt{-1}} \varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

il suffira de prendre

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{\alpha\xi\sqrt{-1}} f(\xi) \frac{d\xi}{2\pi}.$$

f et φ sont ce que Cauchy appelle des *fonctions réciproques*.

CHAPITRE V.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR NON LINÉAIRES.

I. — Quelques règles générales.

1° *Quand une fonction renfermant n constantes arbitraires satisfait à une équation d'ordre n, elle est la solution générale de cette équation ; il en est de même de toute fonction implicite donnée par une équation non résolue renfermant n constantes arbitraires. Ce fait a été établi plus haut* (p. 12).

2° *Lorsqu'une équation différentielle contient seulement la variable x et des dérivées de la fonction inconnue y, sans contenir cette fonction inconnue elle-même, elle peut être remplacée par une autre d'ordre moindre.*

Il suffit, en effet, d'y faire $\frac{dy}{dx} = y'$ et d'y considérer y' comme nouvelle fonction inconnue : alors $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ se trouveront remplacés par $\frac{dy'}{dx}, \frac{d^2y'}{dx^2}, \ldots$; lorsque l'on aura calculé y', y s'obtiendra au moyen d'une quadrature.

3° *Lorsqu'une équation différentielle ne contient pas explicitement la variable indépendante x, on peut toujours la remplacer par une autre d'ordre moindre d'une unité.*

En effet, considérons l'équation

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle y désigne la fonction inconnue : posons

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

nous aurons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}y',$$
$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy'}{dy}y'\right)y' = \frac{d^2 y'}{dy^2}y'^2 + \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2 y',$$
$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d^2 y'}{dy^2}y'^2 + \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2 y'\right]y' = \ldots;$$

on voit ainsi qu'en prenant y' pour fonction inconnue et y pour variable indépendante, l'ordre de l'équation s'abaissera, et cette équation prendra la forme

$$F_1\left(y, y', \frac{dy'}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}y'}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Quand y' sera connu en fonction de y, et que l'on aura, par exemple,

$$y' = \varphi(y),$$

on en déduira

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

ou

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dx, \qquad x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

4° *Lorsqu'une équation est homogène en x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, ..., on peut abaisser son ordre.*

Il suffit, en effet, de poser

$$x = e^t, \qquad y = z e^t;$$

on a alors

$$dx = e^t dt, \qquad dy = dz\, e^t + z e^t dt,$$
$$d^2 x = e^t dt^2, \qquad d^2 y = d^2 z\, e^t + 2\, dz\, e^t dt + z e^t dt^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation proposée et si l'on désigne par n le degré de l'homogénéité, e^{nt} disparaîtra comme entrant en facteur dans tous les termes, et l'équation dans laquelle se transformera la proposée ne contiendra plus la variable indépendante t : on abaissera alors son ordre comme il a été dit tout à l'heure.

5° *Lorsqu'une équation est homogène en* y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots$, *on peut la ramener à une autre d'ordre moindre.*

Il suffit pour cela de poser

$$y = e^{\int z\,dx};$$

on a alors

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int z\,dx} z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int z\,dx} z^2 + e^{\int z\,dx} \frac{dz}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation proposée, $e^{\int z\,dx}$ disparaîtra comme facteur commun dans tous les termes, élevé à une puissance marquée par le degré de l'homogénéité, et, chaque dérivée de y se trouvant remplacée par une expression qui ne renferme que des dérivées de z d'ordre moindre, on obtiendra une équation en z d'ordre moindre que la proposée.

II. — Cas où l'on connaît des solutions.

Lorsque l'on connaît des intégrales d'une équation renfermant des constantes arbitraires, on peut quelquefois en profiter pour abaisser cette équation et essayer de satisfaire à cette équation en remplaçant les constantes par des fonctions convenablement choisies (en faisant, comme l'on dit, varier les constantes). Nous ferons comprendre l'esprit de cette méthode en l'appliquant à une équation linéaire : soient y la fonction inconnue, x la variable; soient y_1, y_2, y_3 des solu-

tions de l'équation linéaire

$$(1)\quad \begin{cases} y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p y = 0, \\ \text{où} \\ \quad y' = \dfrac{dy}{dx}, \qquad y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \qquad \ldots \end{cases}$$

$p_1, p_2, \ldots$ désignant des fonctions données de x; alors c_1, c_2, c_3 désignant des constantes arbitraires

$$(2)\qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

sera une solution de (1). Supposons que l'on remplace c_1, c_2, c_3 par des fonctions de x, et essayons de satisfaire dans cette hypothèse à l'équation (1), en remplaçant y par sa valeur (2). A cet effet, posons

$$(3)\qquad \begin{cases} 0 = c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + c'_3 y_3, \\ 0 = c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c'_3 y'_3, \end{cases}$$

c'_1, c'_2, c'_3 désignant $\dfrac{dc_1}{dx}$, $\dfrac{dc_2}{dx}$, $\dfrac{dc_3}{dx}$: la formule (2) différentiée donnera

$$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + c_3 y'_3,$$
$$y'' = c_1 y''_1 + c_2 y''_2 + c_3 y''_3,$$

et les dérivées y''', y^{IV}, ..., y^n ne contiendront que les dérivées d'ordre $n-2$ au plus des c; ainsi

$$y''' = c_1 y'''_1 + c_2 y'''_2 + c_3 y'''_3 + c'_1 y''_1 + c'_2 y''_2 + c'_3 y''_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En portant ces valeurs de y, y', y'', ... dans (1), on obtiendra une relation (R) entre les c et leurs dérivées, contenant des dérivées d'ordre $n-2$ au plus des c; les équations (3) différentiées donneront c'_2, c'_3, ainsi que leurs dérivées en fonctions linéaires de c'_1, c''_1, ..., si bien que la relation (R) deviendra une équation d'ordre $n-2$ (linéaire dans le cas actuel) en c_1. J'ajoute que cette équation ne contiendra pas c_1 lui-même, en sorte qu'elle pourra être ramenée à l'ordre $n-3$, vu que c_1,

c_2, c_3 ne paraissent pas dans l'équation (R), leurs coefficients étant les premiers membres de (1), où l'on a remplacé y par y_1, y_2, y_3.

c'_1 une fois connu, (3) donneront c'_2 et c'_3; des quadratures donnent alors c_1, c_2, c_3 et (2) fera connaître y.

III. — Cas où l'on a des données sur la nature des intégrales.

Lorsque l'on sait qu'une équation différentielle a des solutions communes avec une autre équation différentielle, on peut trouver ces solutions comme il suit :

Désignons par y', y'', ... les dérivées, prises par rapport à la variable x, de la fonction inconnue, et considérons les deux équations différentielles

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = y^{m}, \tag{1}$$

$$G(x, y, y', y'', \ldots) = y^{n}, \tag{2}$$

résolues par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé de y. Si $m = n$ en les retranchant l'une de l'autre, on aura immédiatement une équation d'ordre $m - 1$ admettant les solutions communes à (1) et (2). Si $m > n$, on différentiera $m - n$ fois l'équation (2) et, en la retranchant de (1), on aura ainsi une équation (3), d'ordre inférieur à m, admettant les solutions communes à (1) et (2). En opérant sur (2) et sur la nouvelle équation (3), comme sur (1) et (2), on remplacera l'une d'elles par une autre d'un ordre moindre, et ainsi de suite. Plusieurs cas pourront alors se présenter :

1° On finit par tomber sur des équations d'ordre zéro qui par suite ne sont plus différentielles; on est alors ramené à une question d'Algèbre : Trouver les solutions communes à deux équations algébriques ou transcendantes. Les solutions communes à (1) et (2) sont alors particulières et sans constantes arbitraires, peut-être même singulières.

2° L'une des équations (2), (3), (4), ... se réduit à une identité. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit l'équa-

tion (3) : si (1) et (2) sont de même ordre, ces équations sont identiques, c'est-à-dire ont les mêmes solutions sinon (1), et l'équation obtenue en différentiant (2) $m-n$ fois ont les mêmes solutions, et l'intégration de (1) sera ramenée à celle de (2) qui est plus simple. En tout cas, les solutions communes à (1) et (2) seront les solutions d'une équation d'ordre inférieur à m.

La connaissance des solutions communes à (1) et (2) sera souvent utile pour intégrer complètement (1) et, en particulier, si cette équation est linéaire.

Lorsque l'on connaît une relation entre les intégrales d'une équation différentielle, on peut en profiter pour découvrir des solutions.

En effet, soient $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, ... Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad F(x, y, y', y'', \ldots) = 0;$$

soient u et v deux solutions et

$$(2) \qquad \varphi(u, v) = 0$$

une relation entre u et v, on aura

$$(3) \qquad F(x, u, u', \ldots) = 0,$$

$$(4) \qquad F(x, v, v', \ldots) = 0.$$

Si de (2) on tire u en fonction de v pour le porter dans (3), cette équation prendra la forme

$$(5) \qquad \psi(x, v, v', \ldots) = 0;$$

les équations (4) et (5) auront alors une solution commune ou, si l'on veut, (1) et

$$\psi(x, y, y', \ldots) = 0$$

auront une solution commune que l'on pourra déterminer par la méthode indiquée précédemment.

IV. — Applications des principes précédents.

1. *Trouver une courbe dans laquelle la courbure soit une fonction donnée $\varphi'(x)$ de l'abscisse.*

En égalant à $\varphi'(x)$ l'expression trouvée (t. II, p. 98) pour la courbure, on a l'équation différentielle de la courbe cherchée

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi'(x);$$

cette équation ne contenant pas y, on prendra y' pour fonction inconnue, et l'on aura

$$\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi'(x)\,dx$$

ou, en appelant c une constante arbitraire,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \varphi(x) - c;$$

on en déduit

$$y' = \frac{\varphi - c}{\sqrt{1-(\varphi - c)^2}}$$

ou

$$dy = \frac{(\varphi - c)\,dx}{\sqrt{1-(\varphi - c)^2}};$$

y est alors donné au moyen d'une quadrature, et l'on a

$$y = c' + \int \frac{(\varphi - c)\,dx}{\sqrt{1-(\varphi - c)^2}},$$

c' désignant une nouvelle constante.

2° *Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel à la normale.*

Si l'on égale les expressions données (t. II, p. 98) pour le rayon de courbure et (t. II, p. 17) pour la normale, en multipliant celles-ci par la constante n, on a

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ny\sqrt{1+y'^2}$$

ou bien

$$\frac{1+y'^2}{y''} = ny.$$

Cette équation ne contenant pas x, on posera

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}y',$$

et l'on aura

$$1+y'^2 = nyy'\frac{dy'}{dy}$$

ou

$$n\frac{y'\,dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{y}.$$

L'intégration donne, en appelant c une constante,

$$\frac{n}{2}\log(1+y'^2) = \log cy$$

ou

(1) $$cy = (1+y'^2)^{\frac{n}{2}};$$

si l'on différentie cette formule, on a

$$cy'\,dx = ny'\,dy'(1+y'^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

ou

$$c\,dx = n(1+y'^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dy'$$

et, par suite,

$$cx = n\int(1+y'^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dy'.$$

Si le nombre n est entier, x pourra toujours s'obtenir au moyen des fonctions algébriques ou logarithmiques (y compris l'arctang). Nous allons examiner quelques cas intéressants :

1° $n = 1$. Alors on a

$$cx = \int (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} dy' = \int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

ou

$$cx = \log(y' + \sqrt{1 + y'^2}),$$

en n'écrivant pas la constante, ce qui revient à transformer les coordonnées. Or (1) donne

$$cy = \sqrt{1 + y'^2};$$

l'élimination de y' donne

$$cx = \log(\sqrt{c^2 y^2 - 1} + cy)$$

ou

$$e^{cx} = \sqrt{c^2 y^2 - 1} + cy;$$

on en tire

$$e^{-cx} = cy - \sqrt{c^2 y^2 - 1},$$

d'où

$$cy = \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2};$$

c'est l'équation d'une chaînette.

II. Supposons $n = -1$: alors

$$cx = -\int (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}} dy'$$

ou

$$cx = -\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

sans ajouter de constante, ce qui ne fait que transformer les coordonnées; or (1) donne

$$cy = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

l'élimination de y' donne

$$c^2 x^2 + c^2 y^2 = 1,$$

équation d'un cercle.

3° Si $n = 2$, on a

$$cy = 1 + y'^2, \qquad c\,dx = 2\,dy', \qquad cx = 2y' ;$$

l'élimination de y' donne

$$cy = 1 + \frac{c^2x^2}{4} ;$$

c'est l'équation d'une parabole.

4° Si $n = -2$, on a

$$cy = \frac{1}{1+y'^2}, \quad cx = -2\int\frac{dy'}{(1+y'^2)^2} = -\left(\frac{y'}{1+y'^2} + \operatorname{arc\,tang} y'\right) ;$$

en faisant $y' = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, on a

$$cy = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi, \qquad cx = -\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi$$

ou, posant $\frac{1}{c} = 2a$,

$$y = 2a\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi, \qquad x = -2a\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi - a\varphi$$

ou

$$y = a(1+\cos\varphi), \qquad x = -a(\sin\varphi + \varphi).$$

Changeons φ en $\pi - \varphi$ et $x + a\pi$ en x : nous aurons

$$y = a(1-\cos\varphi), \qquad x = a(\varphi - \sin\varphi) ;$$

ce sont les équations de la cycloïde.

5° Nous ferons encore $n = 4$: alors

$$cy = (1+y'^2)^2, \qquad cx = 4\int(1+y'^2)\,dy' = 4y' + \frac{4y'^3}{3} ;$$

ce sont les équations d'une courbe unicursale du quatrième degré.

III. *Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel au cube de la normale.*

L'équation du problème est, en appelant n une constante,

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ny^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

ou

$$y^3 y'' = \pm n;$$

on en tire

$$2y''y' = \pm 2n\frac{y'}{y^3}$$

ou bien

$$y'^2 = \pm n\frac{1}{y^2} + c;$$

c désignant une constante, on en déduit

$$dy^2 : \left(\pm n\frac{1}{y^2} + c\right) = dx^2$$

ou

$$x = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{\pm n + cy^2}}$$

ou

$$x = \sqrt{\pm n + cy^2}$$

ou enfin

$$x^2 - cy^2 = \pm n;$$

ce qui représente une conique rapportée à ses axes.

IV. *Trouver les courbes dont le rayon vecteur issu d'un point fixe est égal au rayon de courbure.*

Soient r le rayon vecteur, θ l'angle que fait ce rayon avec un axe fixe passant par le point fixe. L'équation à intégrer sera (t. II, p. 118)

$$r = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{rr'' - 2r'^2 - r^2},$$

r' et r'' désignant les deux dérivées de r prises par rapport à θ; cette équation peut s'écrire

$$r^2(rr'' - 2r'^2 - r^2)^2 = (r^2 + r'^2)^3$$

ou, en divisant par r^6,

$$\left(\frac{rr'' - 2r'^2}{r^2} - 1\right)^2 = \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right)^3.$$

Si l'on pose alors

$$(1) \qquad \frac{r'}{r} = \frac{dr}{r\,d\theta} = \operatorname{tang}\mu, \qquad \frac{rr'' - r'^2}{r^2} = \frac{d\mu}{d\theta}\,\frac{1}{\cos^2\mu},$$

cette équation deviendra

$$\left(\frac{d\mu}{d\theta}\,\frac{1}{\cos^2\mu} - \frac{1}{\cos^2\mu}\right)^2 = \frac{1}{\cos^6\mu}$$

ou

$$\left(\frac{d\mu}{d\theta} - 1\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\mu}$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\mu}{d\theta} = 1 \pm \frac{1}{\cos\mu},$$

d'où l'on tire

$$d\theta = -\frac{d\mu\cos\mu}{1 \pm \cos\mu}$$

et

$$\theta = -\int \frac{\cos\mu\,d\mu}{1 \pm \cos\mu};$$

d'où les deux solutions où l'on n'a pas mis de constante, ce qui revient à faire tourner l'axe polaire

$$\theta = -\mu + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mu, \qquad \theta = \mu + \cot\tfrac{1}{2}\mu.$$

L'équation (1) donne alors

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \operatorname{tang}\mu,$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{d\mu\sin\mu}{1 \pm \cos\mu}$$

et par suite

$$\log r = \log k\cos^2\tfrac{1}{2}\mu \quad \text{ou} \quad -\log k\sin^2\tfrac{1}{2}\mu,$$

k désignant une constante, ou, ce qui revient au même,

$$r = k\cos^2\tfrac{1}{2}\mu, \quad \text{ou} \quad \frac{k}{\sin^2\frac{1}{2}\mu};$$

on a ainsi r et θ en fonction de μ. On ne trouve pas ainsi la solution évidente $r = \text{const.}$, qui est singulière.

Si l'on avait voulu traiter la question avec des coordonnées rectilignes, on aurait obtenu une équation homogène, facile à intégrer, mais avec des calculs beaucoup plus compliqués.

III. — Recherche des courbes égales à leurs développées.

Appelons R le rayon de courbure d'une courbe, α l'angle que fait ce rayon de courbure avec une droite fixe, l'axe des x par exemple. Je dis que l'équation

$$R = \varphi(\alpha) \tag{1}$$

détermine entièrement la *forme* de la courbe (mais non sa position); l'équation (1) devient en effet, en y remplaçant R et α par leurs valeurs exprimées en fonction des coordonnées x, y d'un point de la courbe,

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \psi(y');$$

$\psi(y')$ étant mis pour $\varphi\left(\operatorname{arc\,tang} -\frac{1}{y'}\right)$, on en tire

$$\frac{dy'\psi(y')}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = dx$$

et, par suite,

$$x - x_0 = \theta(y'),$$

x_0 désignant une constante; on déduit de là

$$y' = F(x - x_0),$$

et l'on aura

$$y - y_0 = \int F(x - x_0)\,dx = \Phi(x - x_0);$$

c'est l'équation générale des courbes ayant pour équation

$$y = \Phi(x)$$

transportées parallèlement à elles-mêmes dans leur plan.

Ainsi l'équation (1) détermine complètement la forme d'une courbe, mais cette courbe peut être transportée parallèlement à elle-même, sans que l'équation (1) en soit altérée.

Cela posé, l'équation de la développée de la courbe (1) sera facile à trouver : en appelant R′ son rayon de courbure, son angle de contingence sera $d\alpha$, son élément d'arc $\pm d\mathrm{R}$, en sorte que l'on aura

$$\mathrm{R}' = \pm \frac{d\mathrm{R}}{d\alpha},$$

$$\mathrm{R}' = \pm \varphi'(\alpha);$$

mais l'angle α' que la normale à la développée fait avec l'axe des x est $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$: donc l'équation de la développée est

$$\mathrm{R}' = \varphi'\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

ou, si l'on veut,

(2) $$\mathrm{R} = \varphi'\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Pour que les équations (1) et (2) représentent la même courbe, il faut qu'en faisant tourner l'une des deux courbes d'un angle $\lambda \pm \frac{\pi}{2}$ elles deviennent identiques; donc

(3) $$\varphi(\alpha + \lambda) = \pm \varphi'(\alpha);$$

s'il avait fallu renverser sens dessus dessous l'une des courbes pour la faire coïncider avec l'autre, on aurait eu

(4) $$\varphi(\lambda - \alpha) = \pm \varphi'(\alpha).$$

Nous nous occuperons d'abord de cette équation qui est plus facile à intégrer que (3) : si on la différentie, on trouve

$$-\varphi'(\lambda - \alpha) = \pm \varphi''(\alpha)$$

et, en changeant α en $\lambda - \alpha$,

$$-\varphi'(\alpha) = \pm \varphi''(\lambda - \alpha).$$

Combinée avec (4), cette formule donne

$$\varphi(\lambda-\alpha) = -\varphi''(\lambda-\alpha)$$

ou bien

$$\varphi(\alpha) = -\varphi''(\alpha);$$

cette équation admet pour solution

$$\varphi(\alpha) = \mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha$$

ou

$$\varphi(\alpha) = \mathrm{A}\sin(\alpha+h).$$

A et h désignant deux constantes, on peut supposer $h=0$ sans altérer la forme de la courbe ; on a alors

$$\mathrm{R} = \varphi(\alpha) = \mathrm{A}\sin\alpha$$

ou bien

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \mathrm{A}\sin\left(-\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{y'}\right)$$

ou

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\mathrm{A}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}};$$

on en conclut

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^2} = \frac{1}{\mathrm{A}}$$

et, en intégrant,

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} y' + \frac{1}{2}\,\frac{y'}{1+y'^2} = \frac{x}{\mathrm{A}};$$

on aurait de même

$$\frac{2y'y''}{(1+y'^2)^2} = \frac{2y'}{\mathrm{A}}$$

ou

$$(6) \qquad 2y = -\mathrm{A}\,\frac{1}{1+y'^2}.$$

Des formules (5) et (6), en posant $y' = \operatorname{tang}\frac{u}{2}$, on tire

$$x = \frac{\mathrm{A}}{4}(u+\sin u),$$

$$y = -\frac{\mathrm{A}}{4}(1+\cos u);$$

si l'on change u en $\pi + u$, x en $x + \frac{A}{4}\pi$ et y en $-y$, on trouve

$$x = \frac{A}{4}(u - \sin u),$$

$$y = \frac{A}{4}(1 - \cos u),$$

équations d'une cycloïde.

L'équation (3) paraît beaucoup plus difficile à intégrer que l'équation (4); mais on peut en trouver un nombre illimité de solutions. Si l'on pose en effet

$$\varphi(\alpha) = A_0 e^{n_0 \alpha} + A_1 e^{n_1 \alpha} + A_2 e^{n_2 \alpha} + \dots,$$

$$\varphi(\alpha + \lambda) = A_0 e^{n_0 \lambda} e^{n_0 \alpha} + \dots,$$

$$\varphi'(\alpha) = n_0 A_0 e^{n_0 \alpha} + \dots,$$

on satisfera à la question en prenant

$$n_0 = \pm e^{n_0 \lambda}, \qquad n_1 = \pm e^{n_1 \lambda}, \qquad \dots,$$

c'est-à-dire, en prenant pour n_0, n_1, n_2, ... les racines de l'équation,

$$n = \pm e^{n\lambda}.$$

Cette équation a deux racines réelles; si l'on appelle ν l'une d'elles, on aura

$$\varphi(\alpha) = A e^{\nu \alpha};$$

donc, en remplaçant dans (1) R par sa valeur,

$$(10) \qquad \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = A e^{-\nu \operatorname{arc tang} \frac{1}{y'}};$$

c'est l'équation d'une courbe égale à sa développée. Pour intégrer cette équation, nous prendrons α pour fonction et nous aurons

$$\cot \alpha = -y',$$

$$\frac{\alpha'}{\sin^2 \alpha} = y'';$$

(10) devient alors

$$\frac{\sin^{-1}\alpha}{\alpha'} = \mathrm{A}\,e^{-\nu\alpha}$$

ou

$$\alpha' \sin\alpha\, e^{\nu\alpha} = \mathrm{A}\,;$$

on en conclut

$$\int \sin\alpha\, e^{\nu\alpha}\, d\alpha = \mathrm{A}\,x$$

ou

$$\left(\frac{\nu}{\nu^2+1}\sin\alpha - \frac{1}{\nu^2+1}\cos\alpha\right)e^{\nu\alpha} = \mathrm{A}x + \text{const.}$$

Si l'on différentie, on a

$$\sin\alpha\, e^{\nu\alpha}\, d\alpha = \mathrm{A}\,dx;$$

mais

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\alpha$$

ou

$$dx = -\operatorname{tang}\alpha\, dy,$$

donc

$$-\cos\alpha\, e^{\nu\alpha}\, d\alpha = \mathrm{A}\,dy,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$-\left(\frac{\nu}{\nu^2+1}\cos\alpha + \frac{1}{\nu^2+1}\sin\alpha\right)e^{\nu\alpha} = \mathrm{A}y + \text{const.}$$

On peut, en transformant les coordonnées et en posant

$$\nu = \operatorname{tang}\beta,$$

écrire

$$\mathrm{A}\,x = \cos(\alpha+\beta)e^{\nu\alpha},$$
$$\mathrm{A}\,y = \sin(\alpha+\beta)e^{\nu\alpha};$$

on en conclut

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}(\alpha+\beta),$$

donc $\alpha + \beta$ est l'angle polaire θ de la courbe rapportée à des coordonnées polaires. Mais on a

$$\mathrm{A}(x^2+y^2) = e^{2\nu\alpha};$$

on en conclut, en faisant $x^2+y^2=r^2$,

$$A\,r^2 = e^{2\nu(\theta-\beta)};$$

la courbe cherchée est donc une spirale logarithmique, mais il est clair qu'il existera encore beaucoup d'autres courbes jouissant de la propriété énoncée.

Une analyse toute semblable à la précédente conduirait à trouver les courbes semblables à leurs développées ; il faudrait alors résoudre des équations de la forme

$$\varphi(\alpha+\lambda) = \pm k\varphi(\alpha)$$

ou bien

$$\varphi(\lambda-\alpha) = \pm k\varphi(\alpha).$$

La seconde fournit l'épicycloïde, la première fournit entre autres courbes la spirale logarithmique.

V. — Équation intrinsèque d'une courbe.

Je suppose que l'on demande de déterminer une courbe connaissant la relation

$$\text{(1)}\qquad R = \varphi(s)$$

qui donne le rayon de courbure R en fonction de l'arc ; si l'on choisit des axes de coordonnées quelconques et si l'on appelle α l'angle que la tangente fait avec l'axe des x, on pourra écrire l'équation (1) ainsi

$$\frac{ds}{d\alpha} = \varphi(s)$$

ou

$$\alpha = \int \frac{ds}{\varphi(s)} = \psi(s) + \text{const.} = \psi(s) + a;$$

en prenant les tangentes des deux membres et en observant que $\tang\alpha = \frac{dy}{dx}$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \tang[\psi(s)+a];$$

on aurait de même

$$\cos\alpha \text{ ou } \frac{dx}{ds} = \cos[\psi + a], \qquad \frac{dy}{ds} = \sin[\psi + a]$$

et, par suite,

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos(\psi + a)\,ds,$$

$$y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin(\psi + a)\,ds,$$

x_0 et y_0 désignant deux constantes. Il est clair que la courbe est égale à la courbe représentée par

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos(\psi + a)\,ds,$$

$$y = \int_{s_0}^{s} \sin(\psi + a)\,ds,$$

dont on peut écrire les équations

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos a \cos\psi\,ds - \int_{s_0}^{s} \sin a \sin\psi\,ds,$$

$$y = \int_{s_0}^{s} \sin a \cos\psi\,ds + \int_{0}^{s} \cos a \sin\psi\,ds.$$

Cette courbe elle-même, en faisant tourner les axes de l'angle a, se ramène à

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\psi\,ds, \qquad y = \int_{s_0}^{s} \sin\psi\,ds;$$

donc l'équation $R = \varphi(s)$ ne représente que des courbes égales entre elles et même elle représente *toutes* les courbes égales à une certaine courbe dont la forme est caractérisée par la forme de la fonction φ. On lui donne pour cette raison le nom d'*équation intrinsèque* de la courbe. On devra pouvoir de cette équation déduire les propriétés *intrinsèques* de la courbe, c'est-à-dire les propriétés de cette courbe, considérée abstraction faite du monde extérieur.

Nous allons faire une application de cette théorie à la résolution d'un problème qui pourra paraître difficile au premier abord, mais qui se résoudra simplement si l'on a égard aux considérations précédentes.

VI. — Problème inverse des roulettes.

Problème. — *Quelle courbe* C *faut-il faire rouler sur la courbe donnée* B, *pour qu'un point lié à la courbe* C *décrive la courbe* A *donnée.*

Nous allons chercher l'équation intrinsèque de la courbe C : à cet effet, nous désignerons par ρ, R, R_1 les rayons de courbure de A, B, C respectivement; s sera l'arc des courbes en contact B et C, compté sur chacune d'elles à partir d'une origine fixe jusqu'au point de contact, σ sera l'arc de la courbe A. Enfin n et φ désigneront la distance d'un point de la courbe A au point correspondant de contact des courbes B et C, et l'angle que fait cette distance avec la normale commune à B et C. On a trouvé (t. II, p. 132 et p. 131) (n est normale à l'arc $d\sigma$)

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho = \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_1}\right) \dfrac{n^2}{\cos\varphi - n\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_1}\right)}, \\[2ex] d\sigma = \left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_1}\right) n\, ds. \end{cases}$$

Or ρ est fonction de σ; n et φ sont des fonctions des coordonnées du point de la courbe A et du point de contact correspondant de B et C; donc n et φ sont fonctions de s et σ. Enfin R est fonction de s : ainsi les deux équations précédentes contiendront s, R_1, σ; l'élimination de σ donnera bien une relation entre R_1 et s, c'est-à-dire l'équation intrinsèque de la courbe cherchée.

On peut écrire les équations (1) sous la forme

$$(2)\qquad (n+\rho)n\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = \rho\cos\varphi, \qquad \frac{d\sigma}{ds} = n\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Quand la base est une droite, $\frac{1}{R} = 0$, et, en posant $\frac{1}{R_1} = k$, on a

$$(n + \rho) nk = \rho \cos\varphi, \qquad \frac{d\sigma}{ds} = nk;$$

n, ρ, φ s'expriment en fonction de σ : on aura alors

$$(4) \qquad (n + \rho) \frac{d\sigma}{ds} = \rho \cos\varphi, \qquad nk = \frac{d\sigma}{ds}.$$

La première de ces équations donne s en fonction de σ ou σ en fonction de s; la seconde donne alors k en fonction de s.

Supposons que la roulette doive être une droite parallèle à la base; en prenant la base pour axe des x, on aura $\rho = \infty$, $n = \text{const}$. Les formules (4) donneront

$$\frac{d\sigma}{ds} = \cos\varphi, \qquad nk = \frac{d\sigma}{ds};$$

mais $\cos\varphi = 1$, donc $d\sigma = ds$, $nk = 1$, donc $k = \text{const.}$; la courbe roulante doit donc être un cercle de rayon n. Pour avoir le point décrivant, par le point de contact on élèvera une perpendiculaire qui passera par le centre. Effectivement, le centre décrit bien une droite parallèle à la base.

VII. — Équations de Liouville.

La méthode de la variation des constantes s'applique assez bien à l'équation suivante, résolue par Liouville,

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + F(y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Deux méthodes peuvent servir à l'intégrer : 1° on peut d'abord négliger le dernier terme; on a alors à intégrer

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} = 0,$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = C e^{-\int f(x)\,dx},$$

C désignant une constante. Cela posé, supposant C fonction de y, différentions cette équation; nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{dC}{dy}\frac{dy}{dx} - Cf(x)\right] e^{-\int f(x)dx}$$

ou, remplaçant l'exponentielle par sa valeur,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{C}\frac{dy}{dx}\left[\frac{dC}{dy}\frac{dy}{dx} - Cf(x)\right];$$

portant dans (1) cette valeur à la place de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on a

$$\frac{1}{C}\frac{dy}{dx}\left[\frac{dC}{dy}\frac{dy}{dx} - Cf(x)\right] + f(x)\frac{dy}{dx} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

ou bien

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dy} = F(y),$$

$$C = C' e^{\int F(y)dy};$$

(2) devient alors

$$\frac{dy}{dx} = C' e^{\int F(y)\,dy + \int f(x)\,dx},$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

2° On peut encore intégrer l'équation proposée en posant d'abord $f(x) = 0$ et en suivant la même méthode.

VIII. — Équation de Jacobi.

Si l'on connaît une intégrale première de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y),$$

le reste de l'intégration s'achève par les quadratures.

Soit, en effet,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, c) \tag{2}$$

une intégrale première de (1) : on en tire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi,$$

par suite

$$\mathrm{F}(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi;$$

si nous différentions par rapport à c cette formule identique, nous trouvons

$$0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial c\,\partial y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial c}$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) = 0;$$

donc

$$\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial c}\,dx - \frac{\partial\varphi}{\partial c}\,dy$$

est une différentielle exacte. La formule (2), qui peut s'écrire

$$\varphi\,dx - dy = 0,$$

a donc pour facteur d'intégrabilité $\frac{\partial\varphi}{\partial c}$, et l'on a pour l'intégrale cherchée

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial c}(\varphi\,dx - dy) = \text{const.};$$

ce résultat sera généralisé plus loin.

IX. — Équations de Brassine et de Malmsten.

M. Brassine a démontré que l'on pouvait toujours intégrer complètement l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x, y) = 0, \tag{1}$$

au moyen de quadratures, dès que l'on en connaissait une intégrale première ; si l'on pose en effet

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx},$$

on trouve

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}\left[\frac{dz}{dx} - \frac{1}{2}zf(x)\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}\left[\frac{d^2z}{dx^2} - f(x)\frac{dz}{dx} + \frac{1}{4}zf^2(x) - \frac{1}{2}zf'(x)\right].$$

et l'équation (1) devient

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{4}zf^2(x) - \frac{1}{2}zf'(x) + \varphi\left[x, ze^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}\right]e^{\frac{1}{2}\int f(x)\,dx} = 0.$$

Cette équation est de la forme

$$\frac{d^2z}{dx^2} = F(z, x);$$

elle s'intégrera par suite, en vertu du théorème de Jacobi démontré au paragraphe précédent, au moyen de quadratures, si l'on en connaît une intégrale première, ce qui aura lieu si l'on connaît une intégrale première de la proposée (1).

L'équation suivante, considérée par Malmsten, jouit des mêmes propriétés :

(P) $$\frac{d}{dx}\varphi(x, y') - \psi(x, y) = 0.$$

En effet, si l'on en connaît une intégrale première

(Q) $$\frac{dy}{dx} = \theta(x, y, c),$$

contenant la constante arbitraire c, on pourra d'abord écrire l'équation (P)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{d^2y}{dx^2} - \psi(x, y) = 0,$$

et (Q) ainsi, en la différentiant,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\theta = 0.$$

En éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\,\theta\right) - \psi = 0$$

et, en différentiant par rapport à c,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial c} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial c}\,\theta + \frac{\partial\theta}{\partial y}\,\frac{\partial\theta}{\partial c} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial c}\,\theta\right) = 0;$$

donc $\frac{\partial\theta}{\partial c}$ est un facteur d'intégrabilité de $dy - \theta\,dx$, et la solution de l'équation (P) s'achèvera par les quadratures.

On voit de même que l'équation suivante, encore citée par Malmsten :

$$\frac{d}{dx}\,\varphi(x, y') - y'\,\psi(x, y) = 0$$

s'intègre par quadratures quand on en connaît une intégrale première.

X. — Intégration des équations au moyen d'un facteur.

Étant donnée une équation différentielle

(1) $$F(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

que nous supposons du troisième ordre pour fixer les idées, mais que l'on pourrait supposer d'un ordre supérieur, on pourra souvent l'intégrer en appliquant la méthode suivante.

Posons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = Y', \qquad \ldots;$$

on essayera si F ne pourrait pas être, quel que soit y, la déri-

vée d'une fonction f; pour qu'il en soit ainsi, il faut que (t. III, p. 215)

$$(2)\qquad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \frac{d^3 Y'''}{dx^3} = 0.$$

Si cette relation est satisfaite, on calculera la fonction f et l'on aura une intégrale

$$f = \text{const.}$$

de (1), sur laquelle on pourra opérer comme sur (1). Si la condition (2) n'est pas satisfaite, on cherchera à déterminer λ de manière que λF soit la dérivée d'une fonction f, quel que soit y; alors il faudra que

$$\frac{\partial(\lambda F)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \lambda F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \lambda F}{\partial y''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial \lambda F}{\partial y'''}\right) = 0.$$

Cette équation sera du troisième ordre en λ et se décomposera généralement en plusieurs autres, parce qu'elle doit avoir lieu, quels que soient y, y', y'' et y'''.

Théorème. — *Si une équation d'ordre n peut être mise sous la forme*

$$(3)\qquad P\frac{dy^{n-1}}{dx} + Q = 0 \qquad \text{ou} \qquad P\,dy^{n-1} + Q\,dx = 0,$$

P *et* Q *désignant des fonctions de* x, y, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $\dots$, $y^{n-1} = \dfrac{dy^{n-2}}{dx}$, *il existera toujours un facteur* μ, *tel que*

$$\mu(P\,dy^{n-1} + Q\,dx)$$

soit une différentielle exacte.

En effet, soit

$$\varphi(x, y, y', \dots, y^{n-1}) = c$$

une intégrale de (3), c désignant une constante arbitraire : en différentiant cette intégrale, on a

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,dy' + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{n-1}}\,dy^{n-1} = 0$$

ou

$$(5)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{n-1}}y^n = 0.$$

Cette équation doit fournir la même valeur de y^n que (3); donc on doit avoir

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y^{n-2}}y^{n-1}}{Q} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y^{n-1}}}{P} = \mu,$$

et par suite l'équation (3) multipliée par le facteur μ fournira l'équation (5) ou (4), dont le premier membre est une différentielle exacte.

En égalant le facteur μ à l'infini, on pourra parfois obtenir une solution singulière.

XI. — Remarque curieuse au sujet des équations d'ordre supérieur.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}) = \alpha, \\ \psi(x, y, y', \ldots, y^{n-1}) = \beta, \end{cases}$$

α et β désignant deux constantes arbitraires, deux intégrales d'une équation différentielle d'ordre n. Lagrange a remarqué que, si l'on posait

$$(2)\qquad \theta(\alpha, \beta) = 0$$

et que l'on éliminât α et β entre (1) et (2), on obtenait une équation

$$\theta(\varphi, \psi) = 0,$$

différentielle, admettant pour intégrale le résultat de l'élimination de y^{n-1} entre les équations (1); en effet, cette résultante

$$(3)\qquad f(x, y, \ldots, y^{n-2}, \alpha, \beta) = 0$$

étant différentiée, on obtient une équation

$$(4)\qquad f_1(x, y, \ldots, y^{n-1}, \alpha, \beta) = 0.$$

Ces équations (3), (4) sont équivalentes à (1) et (2); car ce sont des intégrales mises sous des formes différentes d'une même équation différentielle. Si l'on y adjoint l'équation $\theta(\alpha, \beta) = 0$, on tombera donc par l'élimination de α et β sur $\theta(\varphi, \psi) = 0$; (3) est donc une intégrale de cette équation.

L'équation $\theta(\varphi, \psi) = 0$ a une intégrale singulière que l'on peut déduire de (3), en différentiant par rapport à α, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0;$$

mais on a

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0.$$

Cette équation, combinée avec $f = 0$ et $\theta(\alpha, \beta) = 0$, donnera par l'élimination de α et β une solution singulière de $\theta(\varphi, \psi) = 0$.

Considérons, par exemple, l'équation générale des cercles

$$y'''(1 + y'^2) - 3y''^2 y' = 0;$$

l'intégrale générale de cette équation est, ce qu'il est facile de vérifier,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2;$$

deux autres intégrales s'obtiendront en différentiant cette équation et seront

$$(x - \alpha) + y'(y - \beta) = 0,$$
$$1 + (y - \beta)y'' + y'^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$
$$\alpha = x - \frac{1 + y'^2}{y''}y'.$$

L'élimination de y'' donne

$$(x - \alpha) + y'(y - \beta) = 0;$$

cette équation, quand on suppose

$$\theta(\alpha, \beta) = 0,$$

est une intégrale de

$$(5)\qquad \theta\left(y + \frac{1+y'^2}{y''},\ x - \frac{1+y'^2}{y''}\,y'\right) = 0.$$

La solution singulière s'obtient en éliminant α et β entre

$$x = \alpha + y'(y - \beta),$$

$$\theta(\alpha, \beta) = 0,$$

$$y'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \frac{\partial\theta}{\partial\beta} = 0,$$

ce qui fournit la développante de la courbe $\theta(\alpha, \beta) = 0$. On peut ainsi former des équations intégrables, avec des solutions singulières; mais, considérée comme méthode d'intégration, la proposition que nous venons de faire connaître est plus curieuse qu'utile. (LAGRANGE, *Fonctions analytiques*; — J.-A. SERRET, *Journal de Liouville*, 1re série, t. XVIII.)

XII. — Remarques sur la formation des équations différentielles

Nous avons déjà fait observer (p. 12) qu'en éliminant les constantes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ entre l'équation

$$(1)\qquad f(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

et ses n dérivées on obtenait une équation différentielle d'ordre n admettant pour intégrale générale l'équation (1); les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les constantes d'intégration. En procédant de cette façon, on peut former un certain nombre d'équations différentielles qu'il serait difficile d'intégrer directement et dont on connaît *a priori* l'intégrale. Quand on rencontre les équations différentielles que l'on a

ainsi formées *a priori*, on peut avoir la solution de problèmes difficiles à résoudre directement.

C'est ainsi que nous avons (p. 88) pu résoudre des problèmes dont la solution était formée d'une série de courbes homofocales, que nous avons reconnues à la simple inspection de leur équation différentielle.

Une conique arbitraire peut constituer la solution d'un grand nombre de problèmes : ceci nous engage à faire connaître l'équation différentielle de ces courbes, qui est du cinquième ordre, puisque l'équation d'une conique quelconque dépend de cinq constantes arbitraires.

L'équation d'une conique quelconque est réductible à la forme

$$y = mx + n \pm \sqrt{\Delta x^2 + 2ax + b},$$

Δ représentant le discriminant de la courbe; en différentiant deux fois de suite, on élimine m et n, et l'on a

$$y'' = \pm(a^2 - b\Delta)(\Delta x^2 + 2ax + b)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où

(1) $$y''^{-\frac{2}{3}} = (a^2 - b\Delta)^{-\frac{2}{3}}(\Delta x^2 + 2ax + b),$$

et par suite, en différentiant trois fois de suite,

(2) $$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des coniques, qu'il est d'ailleurs bien facile d'intégrer directement sous cette forme. Dans la parabole $\Delta = 0$; dans cette hypothèse, pour éliminer les constantes, il suffit de différentier deux fois l'équation (1) et l'on a, pour l'équation différentielle des paraboles,

(3) $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

En développant les équations (2) et (3), on a

(4) $$5y'''^2 - 3y''y^{\text{iv}} = 0$$

pour l'équation des paraboles, et

$$(5) \qquad 40y'''^3 - 45y''y'''y^{\text{IV}} + 9y''^2y^{\text{V}} = 0$$

pour l'équation des coniques en général.

On arrive encore à cette formule en partant de l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

en différentiant trois fois de suite, on élimine A, D, F et l'on a

$$y'''(Bx + Cy + E) + 3y''(B + Cy') = 0;$$

en différentiant encore, il vient

$$y^{\text{IV}}(Bx + Cy + E) + 4y'''(B + Cy') + 3Cy''^2 = 0.$$

puis, en différentiant encore,

$$y^{\text{V}}(Bx + Cy + E) + 5y^{\text{IV}}(B + Cy') + 10Cy'''y'' = 0.$$

En éliminant alors $Bx + Cy + E$ et $B + Cy'$, on a l'équation des coniques sous la forme

$$\begin{vmatrix} y''' & 3y'' & 0 \\ y^{\text{IV}} & 4y''' & 3y'' \\ y^{\text{V}} & 5y^{\text{IV}} & 10y''' \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit à (5) quand on développe le déterminant. Une méthode toute semblable conduirait à l'équation du neuvième ordre des courbes du troisième degré.

Nous allons faire quelques applications de ces formules.

Problème I. — *Trouver toutes les courbes telles, que leurs diamètres présentent un point d'inflexion aux points où ils rencontrent ces courbes.*

Désignons par x, y les coordonnées d'un point de la courbe cherchée, et par x_1y_1 et x_2y_2 les coordonnées de deux points voisins; soient $x_1 = x + \alpha + \varepsilon$, $x_2 = x - \alpha + \varepsilon$. Si les points x_1y_1 et x_2y_2 sont sur une parallèle à la tangente, il est facile

de voir que $x - x_1$ et $x - x_2$ seront à peu près égaux et de signes contraires, et que la différence 2ε sera du second ordre, ce qui justifie la notation adoptée. Exprimons qu'il en est ainsi : on aura

$$(1) \qquad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = y';$$

or

$$y_1 = y + (\alpha + \varepsilon) y' + (\alpha + \varepsilon)^2 \frac{y''}{1.2} + \ldots,$$

$$y_2 = y - (\alpha - \varepsilon) y' + (\alpha - \varepsilon)^2 \frac{y''}{1.2} - \ldots;$$

donc, en vertu de (1),

$$y' = \frac{1}{2\alpha}\left\{[(\alpha + \varepsilon) + (\alpha - \varepsilon)] y' + [(\alpha + \varepsilon)^2 - (\alpha - \varepsilon)^2] \frac{y''}{1.2} \cdots\right\}$$

ou

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} 0 = 2\varepsilon \frac{y''}{1.2} &+ (\alpha^2 + 3\varepsilon^2) \frac{y'''}{1.2.3} + (4\alpha^2\varepsilon + 4\varepsilon^3) \frac{y^{\text{IV}}}{1.2.3.4} \\ &+ (\alpha^4 + 10\alpha^2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^4) \frac{y^{\text{V}}}{1.2.3.4.5} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées ξ, η d'un point du diamètre sont

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ou

$$\xi = x + \varepsilon,$$

$$\eta = y + \frac{1}{2}\left\{[(\alpha + \varepsilon) - (\alpha - \varepsilon)] y' + [(\alpha + \varepsilon)^2 + (\alpha - \varepsilon)^2] \frac{y''}{1.2} + \ldots\right\}$$

ou

$$(3) \qquad \xi = x + \varepsilon,$$

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \eta = y + \varepsilon y' &+ (\alpha^2 + \varepsilon^2) \frac{y''}{1.2} \\ &+ (3\alpha^2\varepsilon + \varepsilon^3) \frac{y'''}{1.2.3} + (\alpha^4 + 6\alpha^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \frac{y^{\text{IV}}}{1.2.3.4} \\ &+ (5\alpha^4\varepsilon + 10\alpha^2\varepsilon^3 + \varepsilon^5) \frac{y^{\text{V}}}{1.2.3.4.5} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

L'équation (2) donne, comme première approximation,

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2 y'''}{6y''} + \varepsilon',$$

où ε' est du troisième ordre au moins; en substituant cette valeur dans (2), on a

$$0 = 2\left(-\frac{\alpha^2 y'''}{6y''} + \varepsilon'\right)\frac{y''}{1.2} + \frac{\alpha^2 y'''}{1.2.3} + \ldots$$

En bornant l'approximation au troisième ordre, on voit alors que ε' est du quatrième ordre, et, en bornant alors l'approximation au quatrième ordre, on a

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon' y'' + 3\left(-\frac{\alpha^2 y'''}{6y''} + \varepsilon'\right)^2 \frac{y'''}{1.2.3} \\ + 4\alpha^2\left(-\frac{\alpha^2 y'''}{6y''} + \varepsilon'\right)\frac{y^{\text{IV}}}{1.2.3.4} + \alpha^4 \frac{y^{\text{V}}}{1.2.3.4.5}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, aux termes du cinquième ordre près,

$$\varepsilon' = -\frac{\alpha^4}{y''}\left(\frac{y'''^3}{72y''^2} - \frac{y''' y^{\text{IV}}}{36y''} + \frac{y^{\text{V}}}{120}\right)$$

ou

$$\varepsilon' = -\alpha^4\left(\frac{y'''^3}{72y''^3} - \frac{y''' y^{\text{IV}}}{36y''^2} + \frac{y^{\text{V}}}{120y''}\right);$$

donc enfin

$$(5) \qquad \xi = x - \frac{\alpha^2 y'''}{6y''} - \alpha^4\left(\frac{y'''^3}{72y''^3} - \frac{y''' y^{\text{IV}}}{36y''^2} + \frac{y^{\text{V}}}{120y''}\right).$$

On aura ensuite, au lieu de (4),

$$\begin{aligned} \eta = y + y'\left[-\frac{\alpha^2 y'''}{6y''} - \alpha^4\left(\frac{y'''^3}{72y''^3} - \frac{y''' y^{\text{IV}}}{36y''^2} + \frac{y^{\text{V}}}{120y''}\right)\right] \\ + \frac{y''}{1.2}\left(\alpha^2 + \alpha^4 \frac{y'''^2}{36y''^2}\right) + \frac{y'''}{1.2.3}\left(3\alpha^4 \frac{y'''}{6y''}\right) + \frac{y^{\text{IV}}}{1.2.3.4}\alpha^4; \end{aligned}$$

si l'on forme alors l'équation

$$\frac{d^2\xi}{d\alpha^2}\frac{d\eta}{d\alpha} - \frac{d^2\eta}{d\alpha^2}\frac{d\xi}{d\alpha} = 0,$$

qui exprime que le point (x, y) a une inflexion, et, si l'on fait $\alpha = 0$ dans le résultat, on trouve

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{\text{IV}} + 9y''^2y^{\text{V}} = 0.$$

C'est l'équation générale des coniques.

Problème II. — *Trouver une courbe qui ait en chaque point une conique ayant avec elle un contact du cinquième ordre.*

En mettant le problème en équation, on tombe encore sur l'équation générale des coniques.

Problème III. — *Trouver toutes les courbes dont les diamètres sont rectilignes.*

Ce sont, d'après le problème II, des coniques; ce théorème a été démontré pour la première fois par M. Bertrand, dans le *Journal de Liouville*.

Problème IV. — *Trouver toutes les courbes rencontrées par leurs diamètres en des points tels que, si l'on y mène la tangente au diamètre, cette tangente soit parallèle à une direction fixe.*

L'équation différentielle du lieu est celle des paraboles.

Problème V. — *Trouver une courbe dont tous les points sont des sommets.*

L'équation du problème est

$$(1) \qquad y'''(1 + y'^2) - 3y''^2y' = 0;$$

or, quand on cherche l'équation différentielle des cercles

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \text{R}^2,$$

en éliminant α, β, R, on trouve précisément l'équation (1); donc les seules courbes dont tous les points soient des sommets sont des cercles.

La tangente au diamètre d'une courbe au point P où ce diamètre rencontre la courbe est ce que l'on appelle l'*axe d'aberration* en ce point P, l'angle θ que cet axe fait avec la normale en P est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = y' - \frac{(1+y'^2)y'''}{3y''^2};$$

enfin le centre de la conique osculatrice en P, que l'on appelle *centre d'aberration*, est sur l'axe d'aberration. θ est appelé l'*aberration* en P.

Si donc on demande une courbe dont l'aberration soit toujours nulle on trouvera un cercle.

XIII. — Application de la théorie des équations différentielles à la recherche des intégrales définies.

Une méthode assez féconde pour trouver la valeur des intégrales définies consiste à les considérer comme fonctions d'un paramètre, et à chercher une équation différentielle facile à intégrer à laquelle elles satisfassent. Voici quelques exemples de cette méthode.

Soit

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx;$$

on en tire

$$\frac{du}{da} = -\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\frac{dx}{x^2}\,2a,$$

ou, en posant $\frac{a}{x} = t$, $\frac{a\,dx}{x^2} = -dt$,

$$\frac{du}{da} = 2\int_0^\infty e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}}dt.$$

par conséquent

$$\frac{du}{da} + 2u = 0$$

et

$$u = ce^{-2a},$$

c désignant une quantité indépendante de a; on a donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx = ce^{-2a}.$$

Faisant $a = 0$, on a

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = c,$$

où $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; on a, par suite,

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

Considérons encore l'intégrale

$$u = \int_{-n}^{+n}\frac{\cos ax\,dx}{1+x^2};$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{da^2} &= -\int_{-n}^{+n}\frac{x^2\cos ax\,dx}{1+x^2}\\ &= -\int_{-n}^{+n}\cos ax\,dx + \int_{-n}^{+n}\frac{\cos ax\,dx}{1+x^2},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2u}{da^2} = -2\frac{\sin an}{a} + u.$$

Intégrons cette équation : nous aurons

$$\begin{aligned}u = Ae^a + Be^{-a} - e^a\int_0^a\frac{\sin an}{a}e^{-a}\,da\\ + e^{-a}\int_0^a\frac{\sin an}{a}e^a\,da,\end{aligned}$$

A et B désignant deux quantités indépendantes de a. Posant $na = z$, on a

$$\begin{aligned}u = Ae^a + Be^{-a} - e^a\int_0^{na}\frac{\sin z}{z}e^{-\frac{z}{n}}dz\\ + e^{-a}\int_0^{na}\frac{\sin z}{z}e^{+\frac{z}{n}}dz.\end{aligned}$$

Pour $a = 0$, $u = 2 \operatorname{arc\,tang} n$, et $\dfrac{du}{da} = 0$; donc

$$2 \operatorname{arc\,tang} n = \mathrm{A} + \mathrm{B}, \qquad 0 = \mathrm{A} - \mathrm{B};$$

par suite,

$$u = \operatorname{arc\,tang} n(e^a + e^{-a}) - e^a \int_0^{na} \frac{\sin z}{z} e^{-\frac{z}{n}} dz$$
$$- e^{-a} \int_0^{na} \frac{\sin z}{z} e^{\frac{z}{n}} dz.$$

Supposons $a > 0$ et faisons $n = \infty$; nous aurons

$$u = \frac{\pi}{2}(e^a + e^{-a}) - e^a \frac{\pi}{2} + e^{-a} \frac{\pi}{2} = \pi e^{-a};$$

si, au contraire, a était < 0, on aurait πe^a : ainsi l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \pi e^{\mp a},$$

suivant que a est négatif ou positif.

La même méthode pourrait servir à la détermination d'un grand nombre d'intégrales définies, connues pour la plupart au moyen d'autres méthodes. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

EXERCICES ET NOTES.

1. Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit proportionnel au carré de la normale.

2. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel à une puissance de l'ordonnée. Quelles sont les valeurs de cette puissance pour lesquelles on peut achever les calculs?

3. Trouver une surface de révolution, qui en chacun de ses points ait deux rayons de courbure égaux et de signes contraires. (Le méridien est une chaînette.)

4. Trouver un conoïde, ayant en chacun de ses points deux rayons de courbure égaux et de signes contraires (hélicoïde).

5. Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit égal à celui de sa développée ou de la développée de sa développée.

6. Trouver une courbe dont l'arc soit égal à la sous-normale. (S'intègre au moyen de quadratures.)

7. Trouver une courbe dont l'arc soit proportionnel à la normale (*id.*).

8. Former l'équation générale différentielle du quatrième ordre qui appartient à toutes les hyperboles équilatères, et intégrer cette équation.

9. Former l'équation générale des coniques circonscrites à un triangle donné, et trouver l'équation différentielle de ces coniques; intégrer ensuite cette équation différentielle.

10. Trouver une courbe dans laquelle la projection du rayon de courbure sur un axe fixe soit constante.

11. Trouver une courbe telle que la somme des projections de son rayon de courbure sur deux axes rectangulaires soit constante.

12. Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit dans un rapport constant avec celui de sa développée.

13. Voici quelques formules utiles pour résoudre un grand nombre de problèmes sur les rayons de courbure : soient p la distance de l'origine des coordonnées à la tangente à une courbe au point (x, y), ds l'élément d'arc de cette courbe, R son rayon de courbure, α l'angle que la tangente fait avec l'axe des x :

$$x = p\cos\alpha - \frac{dp}{d\alpha}\sin\alpha, \qquad y = p\sin\alpha + \frac{dp}{d\alpha}\cos\alpha,$$

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

$$ds = p\,d\alpha - d\frac{dp}{d\alpha}, \qquad \mathrm{R} = p - \frac{d^2p}{d\alpha^2}.$$

14. Trouver une courbe dans laquelle l'arc soit proportionnel à la distance d'un point fixe à la tangente, comptée sur une droite passant par le point fixe (courbe de poursuite) (*voir* n° 13).

15. Soient R le rayon de courbure d'une courbe et β l'angle qu'il

fait avec un axe fixe; trouver une courbe, telle que

$$F(\beta, R) = 0;$$

si $R = a \cos m\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, la courbe est une épicycloïde (*voir* n° 13).

(TISSERAND, *Exercices.*)

16. Soient s l'arc d'une courbe, α l'angle que la tangente fait avec l'axe des x : déterminer cette courbe sachant que

$$F(\alpha, s) = 0;$$

$s = a\alpha$ donne un cercle, $s = a \operatorname{tang}\alpha$ donne une chaînette,

$$s = a \cos m\alpha$$

donne une épicycloïde (*voir* n° 13). (TISSERAND.)

17. Trouver une courbe telle qu'entre son rayon de courbure R et celui de sa développée R′ il existe la relation (*voir* n° 13)

$$\frac{R^2}{a^2} - \frac{R'^2}{a'^2} = 1;$$

on doit trouver une épicycloïde. (TISSERAND.)

18. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel à la distance d'un point fixe à la tangente (*voir* n° 13).

19. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel au carré de la distance d'un point fixe à la tangente (*voir* n° 13).

20. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit quadruple de la normale.

21. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure ρ soit une fonction du rayon vecteur r.

On s'appuiera sur la formule $\rho = \frac{r\,dr}{dp}$, où p est la perpendiculaire menée de l'origine sur la tangente.

22. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel au rayon vecteur (*voir* l'exercice précédent).

23. Intégrer

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0.$$

24. L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Ay}{(a + 2bx + cx^2)^2}$$

s'intègre en posant $y = e^{\int z\,dx}$; elle devient alors

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = \frac{A}{(a + 2bx + cx^2)^2};$$

on en a une solution

$$z = \frac{b + k + cx}{a + 2bx + cx^2},$$

où

$$k = \sqrt{b^2 - ac + A}.$$

(LIOUVILLE, son *Journal*, 1re série, t. IX.)

25. L'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{m+1}{m+2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (ax^2 + bx + c)^2$$

peut s'intégrer par des quadratures, m, a, b, c étant des constantes

26. Déterminer une courbe telle que, si l'on forme sa transformée par rayons vecteurs réciproques par rapport à un point O, son rayon de courbure en M et le rayon de courbure de sa transformée au point correspondant M′ aient un rapport constant (Concours de Licence, octobre 1875).

27. Si $y = f(x)$ est une intégrale de l'équation

$$2\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dy}{dx} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \varphi(y),$$

$$y = f\left(a + \frac{b}{x - c}\right)$$

sera aussi une intégrale, a, b, c désignant des constantes arbitraires.

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

I. — Équations simultanées du premier ordre.

Un système d'équations simultanées du premier ordre peut toujours être, théoriquement au moins, résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prises par rapport à la variable indépendante x; il peut alors être présenté sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dx} = f_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = f_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dx} = f_n;$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et x. Rien n'empêche de poser, et cela d'une infinité de manières,

$$f_1 = \frac{X_1}{X}, \quad f_2 = \frac{X_2}{X}, \quad \ldots, \quad f_n = \frac{X_n}{X},$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$, dont l'une, par exemple X, peut être supposée égale à un; les équations (1) prennent alors la forme plus symétrique

$$(2) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Parfois les équations simultanées du premier ordre affectent une forme moins simple; en combinant, en effet, les équations (2) par voie d'addition, on peut les mettre sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_n\,dx_n + P\,dx = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_1\,dx_1 + Q_2\,dx_2 + \ldots + Q_n\,dx_n + Q\,dx = 0, \end{cases}$$

$P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots$ désignant toujours des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$.

Nous rappellerons que les systèmes équivalents, (1), (2) ou (3), admettent en général une solution (p. 12) renfermant n constantes arbitraires ; ces constantes sont les valeurs que l'on peut attribuer, arbitrairement à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour une valeur arbitraire de x, auxquelles on donne quelquefois le nom de *valeurs initiales* des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les solutions des équations (1), (2) ou (3) se présentent parfois sous la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Pi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \end{array}\right.$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ désignant des constantes arbitraires, qui naturellement dépendent des valeurs initiales des inconnues. Pour que ces constantes puissent être considérées comme distinctes, il faut que l'on puisse les choisir de telle sorte que pour $x = x^0$ par exemple, x^0 étant arbitraire, on puisse tirer des équations (4), solutions de (1), des valeurs données arbitrairement à l'avance pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les équations (4) constituent l'*intégrale générale* du système (1). Indépendamment de cette solution, le système (1) peut, comme on l'a vu, admettre des intégrales singulières.

Rappelons encore que, si l'on résout, théoriquement au moins, les équations (4) par rapport aux constantes, chacune des équations ainsi obtenues

$$c_1 = \varphi_1, \qquad c_2 = \varphi_2, \qquad \ldots$$

sera ce que l'on appelle une *intégrale* du système (1). On a vu (p. 15) que la condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi = c$ soit une intégrale du système (1) est que φ soit une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0$$

ou

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,$$

ce qui peut permettre quelquefois de découvrir des intégrales du système (1).

Enfin, pour terminer ces généralités, disons que l'on appelle encore intégrale du système (1) toute équation que l'on peut supposer déduite de la solution générale (4) et qui ne renferme qu'une seule constante arbitraire.

II. — Facteurs d'intégrabilité.

On ne sait intégrer qu'un très petit nombre d'équations différentielles simultanées. Nous signalerons quelques procédés généraux, qui malgré leur peu de puissance peuvent rendre des services au calculateur.

Voici, par exemple, un théorème remarquable dont nous ferons usage un peu plus tard :

Théorème. — *Soit*

$$(1)\qquad\left\{\begin{array}{lll} P_1\,dx_1+P_2\,dx_2+\ldots+P_n\,dx_n, & \text{ou} & A=0,\\ Q_1\,dx_1+Q_2\,dx_2+\ldots+Q_n\,dx_n, & \text{ou} & B=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}\right.$$

un système de $n-1$ équations différentielles entre n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les lettres $P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots$ désignant des fonctions quelconques de ces variables; il existe $n-1$ systèmes de facteurs $\lambda, \mu, \ldots,$ tels que $A\lambda+B\mu+\ldots$ soit une différentielle exacte $d\varphi$, en sorte que, si l'on peut connaître l'un de ces systèmes, de $d\varphi=0$, conséquence de (1), on déduira immédiatement l'intégrale $\varphi=$ const.

Soient, en effet,

$$(2)\qquad \varphi_1=c_1,\qquad \varphi_2=c_2,\qquad \ldots,\qquad \varphi_{n-1}=c_{n-1}$$

les intégrales de (1); $c_1, c_2, \ldots$ désignant des constantes, on en tire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n=0,\\ &\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}dx_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et ces équations doivent être identiques (1), c'est-à-dire fournir pour les mêmes valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les mêmes valeurs de $\frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \cdots$; les formules (3) doivent donc être des combinaisons linéaires des formules (1), et, par suite, on peut poser

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}dx_n=\lambda A+\mu B+\ldots,$$

$\lambda, \mu, \ldots$ désignant des facteurs convenablement choisis. Cette équation est de la forme

$$d\varphi=\lambda A+\mu B+\ldots;$$

les formules (1) multipliées par des facteurs convenables et ajoutées doivent donc fournir des différentielles exactes. Il est clair d'ailleurs qu'il doit exister $n-1$ systèmes de facteurs simultanés donnant n différentielles exactes qui, intégrées, fournissent les n intégrales du problème.

Il y a plus, soient $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$ le système de facteurs qui réduit $A\lambda_1+B\mu_1+\ldots$ à la différentielle $d\varphi_1$; $\lambda_2, \mu_2, \ldots$ le système de facteurs qui réduit $A\lambda_2+B\mu_2+\ldots$ à la différentielle $d\varphi_2, \ldots$, de telle sorte que

$$\varphi_1=c_1,\qquad \varphi_2=c_2,\qquad \ldots,\qquad \varphi_{n-1}=c_{n-1}$$

soient les intégrales du système (1). Il existera une infinité d'autres systèmes de facteurs d'intégrabilité; en effet, soit $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ une fonction quelconque de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$; l'expression

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}d\varphi_1+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}d\varphi_2+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_{n-1}}d\varphi_{n-1}$$

sera une différentielle exacte, et, par suite, il en sera de même de

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}(A\lambda_1 + B\mu_1 + \ldots) + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}(A\lambda_2 + B\mu_2 + \ldots) + \ldots$$

ou de

$$A\left[\lambda_1\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} + \lambda_2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} + \ldots\right] + B\left[\mu_1\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} + \mu_2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} + \ldots\right] + \ldots;$$

on a donc un nouveau système de facteurs.

Quoiqu'il soit impossible de donner des règles pour la recherche des facteurs d'intégrabilité, il suffit souvent de savoir que ces facteurs existent pour en découvrir, à simple vue, quelques-uns.

III. — Équations linéaires simultanées.

Des équations simultanées sont linéaires quand les inconnues et leurs dérivées n'y entrent qu'au premier degré. La forme la plus générale d'un tel système est évidemment

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + P_1 x + Q_1 y + \ldots + R_1 z = S_1, \\ \dfrac{dy}{dt} + P_2 x + Q_2 y + \ldots + R_2 z = S_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dz}{dt} + P_n x + Q_n y + \ldots + R_n z = S_n, \end{cases}$$

où $P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots, S_1, S_2, \ldots$ sont fonctions de t seul. Pour les intégrer, multiplions chacune de ces équations, à l'exception de la première, par des facteurs $\mu, \ldots, \nu$ et ajoutons-les; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \mu\frac{dy}{dt} + \ldots + \nu\frac{dz}{dt} &+ x(P_1 + P_2\mu + \ldots + P_n\nu) \\ &+ y(Q_1 + Q_2\mu + \ldots + Q_n\nu) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ z(R_1 + R_2\mu + \ldots + R_n\nu) \\ &- \quad (S_1 + S_2\mu + \ldots + S_n\nu) = 0. \end{aligned}$$

Si nous posons alors

$$(2)\qquad \begin{cases} x + \mu y + \ldots + \nu z = u, \\ P_1 + P_2\mu + \ldots + P_n\nu = p, \\ Q_1 + Q_2\mu + \ldots + Q_n\nu = q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_1 + S_2\mu + \ldots + S_n\nu = s. \end{cases}$$

L'équation précédente deviendra

$$\frac{du}{dt} - y\frac{d\mu}{dt} - \ldots - z\frac{d\nu}{dt} + px + qy + \ldots + rz = s,$$

et, en remplaçant x par sa valeur déduite de (2),

$$\frac{du}{dt} - y\frac{d\mu}{dt} - \ldots - z\frac{d\nu}{dt} + p(u - \mu y - \ldots - \nu z) + qy + \ldots + rz = s,$$

c'est-à-dire

$$\frac{du}{dt} + pu - s - y\left(\frac{d\mu}{dt} + p\mu - q\right) - \ldots - z\left(\frac{d\nu}{dt} + p\nu - r\right) = 0.$$

Maintenant, profitant de l'indétermination de μ, ..., ν, posons

$$(3)\qquad \frac{d\mu}{dt} + p\mu - q = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\nu}{dt} + p\nu - r = 0;$$

nous aurons

$$\frac{du}{dt} + pu - s = 0$$

ou

$$u = e^{-\int p\,dt}\int s e^{\int p\,dt}\,dt.$$

Les équations (3) feront connaître les $n-1$ facteurs $\mu, \nu, \ldots$, et, par suite, on connaîtra u; n systèmes de facteurs $\mu, \ldots, \nu$ feront connaître n valeurs de u et les formules (2) donneront n équations de la forme

$$\begin{aligned} x + \mu_1 y + \ldots + \nu_1 z &= u_1, \\ x + \mu_2 y + \ldots + \nu_2 z &= u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où l'on conclura $x, y, \ldots, z$. Mais les équations (3) seront, en général, difficiles à intégrer; elles sont du second degré en $\mu, \ldots, \nu$ et simultanées : toutefois on n'a besoin d'en connaître que n solutions isolées. La méthode que nous venons d'indiquer, due à d'Alembert, est plus curieuse qu'utile; elle réussit cependant assez bien dans le cas où le système (1) se compose de deux équations; on n'a alors qu'un seul facteur à déterminer : le système se réduit alors à

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu P_1 + \mu^2 P_2 = Q_1 + Q_2 \mu,$$

équation que l'on sait intégrer quand on en a une solution (p. 62).

IV. — Équations linéaires à coefficients constants.

Lorsque les équations linéaires données sont à coefficients constants et homogènes, par rapport aux dérivées et aux inconnues, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la méthode de d'Alembert pour les intégrer.

Considérons, par exemple, les équations à coefficients constants a_{ij}

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n; \end{cases}$$

pour les intégrer, on posera, γ et s désignant des constantes,

$$(2)\qquad x_1 = \gamma_1 e^{st}, \qquad x_2 = \gamma_2 e^{st}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \gamma_n e^{st};$$

les équations (1) deviendront alors

$$(3)\qquad \begin{cases} (a_{11} - s)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - s)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - s)\gamma_n = 0, \end{cases}$$

et, si l'on peut y satisfaire, on aura des solutions de (1). Or on les résoudra en calculant d'abord s au moyen de l'équation obtenue en éliminant les quantités $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, à savoir

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0,$$

que nous représenterons aussi par $S = 0$. Cette équation aura ordinairement ses racines distinctes : en les appelant $s_1, s_2, \ldots, s_n$, chacune d'elles, portée dans les formules (3), permettra de calculer les rapports $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \ldots : \gamma_n$; l'une de ces quantités sera donc arbitraire; chaque racine s de $S = 0$ fournira donc une solution des équations (1) renfermant une constante arbitraire, et, en ajoutant les solutions ainsi trouvées, on aura l'intégrale générale cherchée; ainsi $x_1, x_2, \ldots$ sont de la forme

$$x_1 = \gamma_{11}e^{s_1 t} + \gamma_{12}e^{s_2 t} + \ldots + \gamma_{1n}e^{s_n t},$$
$$x_2 = \gamma_{21}e^{s_1 t} + \gamma_{22}e^{s_2 t} + \ldots + \gamma_{2n}e^{s_n t}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les γ_{ij} désignant des constantes dont n sont arbitraires.

Mais notre théorie est sujette à des restrictions. Deux choses pourront la faire tomber en défaut : 1° l'équation $S = 0$ pourrait avoir des racines égales; alors, s n'ayant plus n valeurs, on n'aura plus n systèmes de valeurs pour les quantités γ_{ij}; 2° il pourrait arriver que les équations donnant les γ_{ij}, à savoir les équations (3), fussent indéterminées et il semble que l'intégrale puisse contenir plus de n constantes arbitraires; mais ce fait seul, par son absurdité, laisse à penser que l'équation $S = 0$ devra avoir des racines multiples : c'est ce que l'on va vérifier. Si les équations (3) sont indéterminées, examinons le cas le plus simple, celui où tous les mineurs du premier ordre de S sont nuls, sans que tous ceux du second le soient; nous aurons

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\partial S}{\partial(a_{11}-s)}\frac{d(a_{11}-s)}{ds} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial a_{ij}}\frac{da_{ij}}{ds} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad \frac{dS}{ds} = -\frac{\partial S}{\partial(a_{11}-s)} - \frac{\partial S}{\partial(a_{22}-s)} - \ldots - \frac{\partial S}{\partial(a_{nn}-s)};$$

il en résulte que $\frac{dS}{ds}$ est nul, puisque tous ses termes le sont, donc $S=0$ a une racine double. On verrait de même que, si l'indétermination des formules (3) était plus grande et que les déterminants du second ordre de S fussent nuls, $S=0$ aurait une racine triple, etc.; cela revient à dire que si deux, trois, etc., des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sont arbitraires, deux, trois, etc., racines de $S=0$ deviennent égales : il n'y a donc pas à craindre qu'il s'introduise *trop* de constantes arbitraires dans la solution.

Mais il pourra très bien arriver que l'on ait $\frac{dS}{ds}=0$, sans que les déterminants mineurs de S soient tous nuls : notre méthode tombera alors en défaut; je dois faire observer seulement que, si le déterminant S est symétrique, c'est-à-dire si $a_{ij}=a_{ji}$, elle ne tombera *pas* en défaut. Dans ce cas, en effet, on a vu (p. 238, t. I) que, si l'équation (4) a des racines doubles, les mineurs de S sont nuls, etc.

Supposons S racine d'ordre de multiplicité k de $S=0$, on trouvera comme il suit k solutions distinctes de (1) : en posant toujours

$$(2) \qquad x_1 = \gamma_1 e^{st}, \quad \ldots, \quad x_n = \gamma_n e^{st},$$

les équations (3) donneront si l'on veut, en écrivant $\frac{\partial S}{\partial a_{ii}}$ au lieu de $\frac{\partial S}{\partial(a_{ii}-s)}$,

$$\gamma_1 = \frac{\partial S}{\partial a_{11}}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial S}{\partial a_{12}}, \quad \ldots, \quad \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial a_{1n}};$$

mais on a identiquement

$$\begin{aligned} a_{11}(\gamma_1 e^{st}) &+ \ldots + a_{1n}(\gamma_n e^{st}) - \frac{d}{dt}(\gamma_1 e^{st}) \\ &= e^{st}[(a_{11}-s)\gamma_1 - a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n] \\ &= e^{st}\left[(a_{11}-s)\frac{\partial S}{\partial a_{11}} + a_{12}\frac{\partial S}{\partial a_{12}} + \ldots + a_{1n}\frac{\partial S}{\partial a_{1n}}\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$a_{11}\gamma_1 e^{st} + \ldots - \frac{d(\gamma_1 e^{st})}{dt} = S e^{st},$$

$$a_{21}\gamma_1 e^{st} + \ldots - \frac{d(\gamma_2 e^{st})}{dt} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Différentions ces identités $k-1$ fois par rapport à s : nous aurons, en général,

$$a_{11}\frac{\partial^i}{\partial s^i}(\gamma_1 e^{st}) + \ldots - \frac{\partial^i}{\partial s_i}\frac{d(\gamma_1 e^{st})}{dt} = (S t^i + i S' t^{i-1} + \ldots)e^{st},$$

$$a_{21}\frac{\partial^i}{\partial s^i}(\gamma_1 e^{st}) + \ldots - \frac{\partial^i}{\partial s^i}\frac{d(\gamma_1 e^{st})}{dt} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

s étant racine d'ordre k de $S = 0$, on voit que S, S', ..., S^{k-1} sont nuls et que non seulement

$$x_1 = \gamma_1 e^{st}, \qquad x_2 = \gamma_2 e^{st}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \gamma_n e^{st}$$

seront solutions de (1), mais qu'il en sera de même de

$$x_1 = \frac{\partial^i(\gamma_1 e^{st})}{\partial s^i}, \qquad x_2 = \frac{\partial^i(\gamma_2 e^{st})}{\partial s^i}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\partial^i(\gamma_n e^{st})}{\partial s^i}$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k-1$. Nous indiquerons tout à l'heure une méthode générale due à Cauchy applicable à tous les cas. (*Voir* un Mémoire de M. Sauvage, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. X.)

V. — Extension aux équations d'ordre supérieur.

La méthode précédente s'applique encore aux équations d'ordre supérieur, soit directement, soit en les remplaçant par des équations du premier ordre; considérons, par exemple, les équations

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = ky, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = kx;$$

on les ramène au premier ordre en posant

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = ky,$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = kx.$$

Mais il vaut mieux poser immédiatement

$$x = \mathrm{A}e^{st}, \qquad y = \mathrm{B}e^{st};$$

on aura alors, en portant ces valeurs dans les équations proposées

$$\mathrm{A}s^2 - k\mathrm{B} = 0,$$
$$\mathrm{B}s^2 - k\mathrm{A} = 0;$$

l'élimination de A et B donne $s^4 - k^2 = 0$, ou

$$s = \pm\sqrt{k}, \qquad s = \pm\sqrt{-k}, \qquad \mathrm{B} = k\,\frac{\mathrm{A}}{s^2} = \pm\mathrm{A};$$

on en conclut les solutions

$$x = \mathrm{A}e^{t\sqrt{k}} + \mathrm{A}_1 e^{-t\sqrt{k}} + \mathrm{A}_2\cos t\sqrt{k} + \mathrm{A}_3\sin t\sqrt{k}.$$
$$y = \mathrm{A}e^{t\sqrt{k}} + \mathrm{A}_1 e^{-t\sqrt{k}} - \mathrm{A}_2\cos t\sqrt{k} - \mathrm{A}_3\sin t\sqrt{k}.$$

VI. — Méthode de Cauchy.

Cauchy a perfectionné la méthode précédente et il a donné des formules qui permettent d'intégrer immédiatement les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n, \end{cases}$$

considérées tout à l'heure, surtout quand l'équation en s, qu'il appelle l'*équation caractéristique,* a des racines égales.

Soit

$$F(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix};$$

les solutions sont, en général, de la forme

$$x_1 = A_1 e^{s_1 t_1} + A_2 e^{s_2 t_2} + \dots,$$

$s_1, s_2, \dots$ désignant les racines de $F(s) = 0$; on peut donc écrire

$$(2) \qquad x_1 = \mathcal{E} \frac{\theta_1(s) e^{st}}{F(s)}, \qquad x_2 = \mathcal{E} \frac{\theta_2(s) e^{st}}{F(s)}, \qquad \dots;$$

portant ces valeurs dans (1), on voit que ces équations seront satisfaites si l'on a

$$\mathcal{E} \frac{(s - a_{11})\theta_1 - a_{12}\theta_2 - \dots - a_{1n}\theta_n}{F(s)} e^{st} = 0,$$
$$\mathcal{E} \frac{-a_{21}\theta_1 + (s - a_{22})\theta_2 - \dots - a_{2n}\theta_n}{F(s)} e^{st} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Pour satisfaire à ces dernières équations, il suffit de poser

$$(s - a_{11})\theta_1 - a_{12}\theta_2 - \dots - a_{1n}\theta_n = \alpha_1 F(s),$$
$$-a_{21}\theta_1 + (s - a_{22})\theta_2 - \dots - a_{2n}\theta_n = \alpha_2 F(s),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ désignant des constantes arbitraires. On tirera de ces équations des valeurs entières pour $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ de la forme

$$\theta_1 = \varphi_{11}(s)\alpha_1 + \varphi_{12}(s)\alpha_2 + \dots + \varphi_{1n}(s)\alpha_n,$$
$$\theta_2 = \varphi_{21}(s)\alpha_1 + \varphi_{22}(s)\alpha_2 + \dots + \varphi_{2n}(s)\alpha_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

les polynômes $\varphi_{ij}(s)$ seront de degré $n - 2$ en s, à l'exception des polynômes φ_{ii}, où $i = j$, qui seront de degrés $n - 1$.

Ainsi nous avons pour toutes les formes possibles de l'équation caractéristique des solutions des équations (1)

renfermant n constantes arbitraires α_1, α_2, ..., α_n; car, s restant indéterminé, les mineurs de $F(s)$ ne sauraient être tous nuls.

Il y a plus : pour $t=0$, x_1, x_2, ..., ainsi déterminés, se réduisent précisément à α_1, α_2, ... En effet, (2) peuvent s'écrire

$$x_1 = \mathcal{E} \frac{\varphi_{11}(s)\alpha_1 + \varphi_{12}(s)\alpha_2 + \ldots}{F(s)} e^{st}, \qquad \ldots;$$

or, pour $t=0$,

$$x_1 = \mathcal{E} \frac{\varphi_{11}(s)\alpha_1 + \varphi_{12}(s)\alpha_2 + \ldots}{F(s)}, \qquad \ldots;$$

mais, φ_{12}, φ_{13}, ... étant de degré $n-2$,

$$\mathcal{E} \frac{\varphi_{12}}{F} = 0, \qquad \mathcal{E} \frac{\varphi_{13}}{F} = 0, \qquad \ldots,$$

et φ_{11} étant de degré $n-1$, $\mathcal{E} \frac{\varphi_{11}(s)}{F(s)}$ sera égal au rapport des coefficients des termes des degrés les plus élevés dans φ_{11} et F; or ce rapport est un, donc $x_1 = \alpha_1$, pour $t=0$.

C. Q. F. D.

$$x_1 = \mathcal{E} \frac{\varphi_{11}(s)\alpha_1 + \varphi_{12}(s)\alpha_2 + \ldots}{F(s)} e^{s(t-t_0)}, \qquad \ldots$$

seraient des solutions de (1) se réduisant à α_1, α_2, ... pour $t=t_0$.

La même méthode peut également servir à intégrer des équations d'ordre supérieur sans qu'il soit nécessaire de les remplacer, comme on l'a montré au paragraphe précédent, par des équations du premier ordre.

Considérons, par exemple, les équations suivantes

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = Ax + B''y + B'z, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = B''x + A'y + Bz, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = B'x + By + A''z, \end{cases}$$

où A, A', A'', B, B', B'' désignent des constantes; posant $x = \theta_1 e^{st}$, $y = \theta_2 e^{st}$, $z = \theta_3 e^{st}$; x, y, z satisferont aux équations (3) si l'on a

$$(4)\quad \begin{cases} (A - s^2)\theta_1 + B''\theta_2 + B'\theta_3 = 0, \\ B''\theta_1 + (A' - s^2)\theta_2 + B\theta_3 = 0, \\ B'\theta_1 + B\theta_2 + (A'' - s^2)\theta_3 = 0; \end{cases}$$

s sera déterminé par l'équation caractéristique du sixième degré

$$\begin{aligned} F(s) = s^6 - (A + A' + A'')s^4 \\ + (AA' + A'A'' + A''A - B^2 - B'^2 - B''^2)s^2 - \Delta = 0, \end{aligned}$$

Δ désignant le déterminant des coefficients de x, y, z dans les seconds membres de (3), et θ_1, θ_2, θ_3 seront alors déterminés par les équations (4). Mais on peut aussi satisfaire aux équations (3) en prenant

$$x = \mathcal{E}\frac{\theta_1(s)e^{st}}{F(s)}, \qquad y = \mathcal{E}\frac{\theta_2(s)e^{st}}{F(s)}, \qquad z = \mathcal{E}\frac{\theta_3(s)e^{st}}{F(s)},$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant déduits non plus de (4), mais de

$$\begin{aligned} (A - s^2)\theta_1(s) + B''\theta_2(s) + B'\theta_3(s) = (\alpha_1 s + \beta_1)F(s), \\ B''\theta_1(s) + (A' - s^2)\theta_2(s) + B\theta_3(s) = (\alpha_2 s + \beta_2)F(s), \\ B'\theta_1(s) + B\theta_2(s) + (A'' - s^2)\theta_3(s) = (\alpha_3 s + \beta_3)F(s); \end{aligned}$$

on tire de là, pour θ_1, θ_2, θ_3, des valeurs qui sont entières en s : par exemple

$$\theta_1 = (\alpha_1 s + \beta_1)\varphi_1(s) + (\alpha_2 s + \beta_2)\varphi_2(s) + (\alpha_3 s + \beta_3)\varphi_3(s);$$

$\varphi_1(s)$ est du quatrième degré, φ_3 et φ_2 sont seulement du second degré; donc la valeur de x se réduira à

$$\mathcal{E}\frac{(\alpha_1 s + \beta_1)e^{st}\varphi_1(s)}{F(s)},$$

et, pour $t = 0$, à

$$\mathcal{E}\frac{(\alpha_1 s + \beta_1)\varphi(s)}{F(s)}.$$

Le coefficient de x^4 dans $\varphi(s)$ est 1, il n'y a pas de terme en x^3, donc x se réduira à α_1 pour $t = 0$, $\frac{dx}{dt}$ est égal à

$$\mathcal{E}\,\frac{(\alpha_1 s^2 + \beta_1 s)e^{st}\varphi_1(s)}{F(s)};$$

donc, pour $x = 0$, il se réduit à β_1, etc. Le choix des coefficients A, B, ... permettra de vérifier les résultats pour le cas où $F(s)$ a des racines multiples.

VII. — Équations linéaires non homogènes.

Occupons-nous maintenant des équations linéaires par rapport aux fonctions inconnues et leurs dérivées mais non homogènes; elles peuvent se ramener à la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t). \end{array}\right.$$

Nous supposerons que l'on soit parvenu à trouver n solutions distinctes de ces équations dans l'hypothèse où

$$f_1(t) = f_2(t) = \ldots = 0;$$

soient

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} x_1 = x_{11}, & x_2 = x_{21}, & \ldots. & x_n = x_{n1}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x_1 = x_{1n}, & x_2 = x_{2n}, & \ldots, & x_n = x_{nn} \end{array}\right.$$

ces solutions; soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des constantes arbitraires;

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = A_1 x_{11} + A_2 x_{12} + \ldots + A_n x_{1n}, \\ x_2 = A_1 x_{21} + A_2 x_{22} + \ldots + A_n x_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = A_1 x_{n1} + A_2 x_{n2} + \ldots + A_n x_{nn} \end{array}\right.$$

constitueront une nouvelle solution qui sera évidemment la solution générale, puisqu'elle contiendra n constantes A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Pour que les solutions (2) soient distinctes et que (3) soit réellement la solution la plus générale, il faut que, pour $t = t^0$, $x_1, x_2, \ldots$ puissent être choisis arbitrairement par un choix convenable des A; c'est ce qui aura lieu en vertu des formules (3), si le déterminant

$$\sum \pm x_{11} x_{22} \ldots x_{nn}$$

est différent de zéro pour $t = t^0$, ce que nous supposerons.

Appliquons la méthode de la variation des constantes et essayons de satisfaire aux équations (1) à l'aide des formules (3), mais, en y supposant les quantités A fonctions de t, nous aurons

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt} = A_1 \frac{dx_{11}}{dt} + \ldots + A_n \frac{dx_{1n}}{dt} + x_{11} \frac{dA_1}{dt} + \ldots + x_{1n} \frac{dA_n}{dt}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dx_n}{dt} = A_1 \frac{dx_{n1}}{dt} + \ldots + A_n \frac{dx_{nn}}{dt} + x_{n1} \frac{dA_1}{dt} + \ldots + x_{nn} \frac{dA_n}{dt}.
\end{gathered}$$

En portant ces valeurs et les valeurs (3) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans (1), celles-ci deviennent, en observant que les x_{ij} sont des solutions dans l'hypothèse $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned}
& x_{11} \frac{dA_1}{dt} + \ldots + x_{1n} \frac{dA_n}{dt} = -f_1(t), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& x_{n1} \frac{dA_1}{dt} + \ldots + x_{nn} \frac{dA_n}{dt} = -f_n(t);
\end{aligned} \right.$$

de ces formules on tire $\frac{dA_1}{dt}, \frac{dA_2}{dt}, \ldots$, puisque le déterminant $\sum \pm x_{11}\, x_{12} \ldots x_{nn}$ n'est pas nul, et la solution s'achève par les quadratures.

Lorsque les coefficients a_{ij} se réduisent à des constantes, nous avons vu que l'on trouvait facilement des solutions par-

ticulières dans l'hypothèse $f_1 = f_2 = \ldots = 0$; la méthode précédente sera donc toujours applicable à ce cas.

Dans le cas où les a_{ij} sont constants et où

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0,$$

nous avons trouvé avec Cauchy au paragraphe antéprécédent

$$x_1 = \mathcal{E} \frac{\alpha_1 \varphi_{11} + \alpha_2 \varphi_{12} + \ldots + \alpha_n \varphi_{1n}}{F} e^{s(t-t_0)},$$
$$x_2 = \mathcal{E} \frac{\alpha_1 \varphi_{21} + \alpha_2 \varphi_{22} + \ldots + \alpha_n \varphi_{2n}}{F} e^{s(t-t_0)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si maintenant, en supposant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ fonctions de t, on essaye de satisfaire aux équations (1), on trouve, en appliquant la méthode de la variation des constantes, que $\alpha'_1 = \frac{d\alpha_1}{dt}$, $\alpha'_2, \ldots$ doivent satisfaire aux équations

$$\mathcal{E} \frac{\alpha'_1 \varphi_{11} + \ldots + \alpha'_n \varphi_{1n}}{F} e^{s(t-t_0)} = -f_1(t),$$
$$\mathcal{E} \frac{\alpha'_1 \varphi_{21} + \ldots + \alpha'_n \varphi_{2n}}{F} e^{s(t-t_0)} = -f_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On satisfait à ces formules en prenant pour les dérivées α'_i les valeurs

$$\alpha'_1 = -e^{-s(t-t_0)} f_1(t),$$
$$\alpha'_2 = -e^{-s(t-t_0)} f_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

car elles se réduiront, en observant que $\varphi_{ij}(s)$ quand $i \lessgtr j$ est de degré inférieur de deux unités à $F(s)$, à

$$-f_1(t)\,\mathcal{E}\frac{\varphi_{11}}{F} = -f_1(t), \qquad -f_2(t)\,\mathcal{E}\frac{\varphi_{22}}{F} = -f_2(t), \qquad \ldots,$$

ou à des identités. On aura donc

$$\alpha_1 = -\int_{t_0}^{t} e^{-s(\mu-t_0)} f_1(\mu)\, d\mu + \text{const.},$$
$$\alpha_2 = -\int_{t_0}^{t} e^{-s(\mu-t_0)} f_2(\mu)\, d\mu + \text{const.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite, les solutions du système (1) sont

$$x_1 = -\mathcal{E}\int_{t_0}^{t} \frac{f_1(\mu)\varphi_{11}(s)+\ldots+f_n(\mu)\varphi_{1n}(s)}{F(s)}\, e^{s(t-\mu)}\,d\mu,$$

$$x_2 = -\mathcal{E}\int_{t_0}^{t} \frac{f_1(\mu)\varphi_{21}(s)+\ldots+f_n(\mu)\varphi_{2n}(s)}{F(s)}\, e^{s(t-\mu)}\,d\mu,$$

. . . .

Pour $t = t_0$, ces solutions se réduisent à zéro; pour avoir des solutions se réduisant pour $t = t_0$ à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, il suffira d'y ajouter les solutions qui se réduiraient à ces quantités pour $f_1 = f_2 = \ldots = 0$. Ainsi ces solutions seront

$$x_1 = \mathcal{E}\left[\frac{\alpha_1\varphi_{11}+\ldots+\alpha_n\varphi_{1n}}{F(s)}\, e^{s(t-t_0)} - \int_{t_0}^{t} \frac{f_1(\mu)\varphi_{11}+\ldots+f_n(\mu)\varphi_{1n}}{F(s)}\, e^{s(t-\mu)}\,d\mu\right],$$

. . . .

VIII. — Autre manière de résoudre la question.

Pour intégrer le système

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

déjà considéré, on peut encore employer une autre méthode qui laisse une certaine latitude au calculateur : elle consiste à chercher les multiplicateurs du système (1). A cet effet, multiplions la première équation par λ_1, la seconde par λ_2 et ajoutons : nous aurons

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda_1\,dx_1 + \lambda_2\,dx_2 + \ldots \\ \quad + \lambda_n\,dx_n - dt\,[(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1)\lambda_1 + \ldots] = 0. \end{cases}$$

Pour que le premier membre de cette équation soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i},$$
$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial t} = -(a_{1i}\lambda_1 + \ldots + a_{ni}\lambda_n) + \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_i}(a_{11}x_1 + \ldots) + \ldots;$$

on satisfera à ces équations en supposant les facteurs λ fonctions de la seule variable t et en les déterminant par le moyen des formules

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\lambda_1}{dt} + a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \ldots + a_{n1}\lambda_n = 0, \\ \dfrac{d\lambda_2}{dt} + a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{n2}\lambda_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

ces équations sont linéaires et homogènes. Il suffit, pour pouvoir trouver une intégrale de (1), d'avoir une intégrale particulière de (3); il y a plus, même en supposant f_1, f_2, ... nuls, on peut à l'intégration des équations (1) substituer celle des équations (3) qui peut être plus facile.

Lorsque $f_1 = f_2 = \ldots = 0$, il est bon d'observer que de (1) et (3) on tire

$$\lambda_1 dx_1 + \lambda_2 dx_2 + \ldots + x_1 d\lambda_1 + x_2 d\lambda_2 + \ldots = 0$$

et, par suite,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \text{const.},$$

ce qui est une intégrale du système (1), (3).

IX. — Sur un système à trois fonctions inconnues.

Lorsque l'on rencontre des systèmes d'équations de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ij}\, x_i\, x_j,$$

où les a_{ij} désignent des quantités constantes, on réussit quel-

quefois à les intégrer en prenant pour x_1, x_2, ... des fonctions doublement périodiques de t de mêmes périodes.

Considérons, par exemple, le système suivant que l'on rencontre dans la théorie du mouvement des corps solides

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha yz, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta xz, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma xy, \end{aligned}\right.$$

α, β, γ désignant trois constantes. On intègre ce système, en prenant pour x, y, z des expressions de la forme

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{A}\,\mathrm{sn}(gt+h), \\ y &= \mathrm{B}\,\mathrm{cn}(gt+h), \\ z &= \mathrm{C}\,\mathrm{dn}(gt+h), \end{aligned}$$

A, B, C, g, h désignant des constantes, ainsi que le module k des fonctions elliptiques. Nous aurons (t. IV, p. 198)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \quad \mathrm{A}g\,\mathrm{cn}(gt+h)\,\mathrm{dn}(gt+h), \\ \frac{dy}{dt} &= -\mathrm{B}g\,\mathrm{sn}(gt+h)\,\mathrm{dn}(gt+h), \\ \frac{dz}{dt} &= -\mathrm{C}gk^2\,\mathrm{sn}(gt+h)\,\mathrm{cn}(gt+h); \end{aligned}$$

en portant ces valeurs dans (1), ce système sera évidemment satisfait, si l'on détermine les constantes A, B, C au moyen des équations

$$(2)\qquad \mathrm{A}g = \alpha, \qquad \mathrm{B}g = -\beta, \qquad \mathrm{C}gk^2 = -\gamma;$$

on aura donc la solution générale

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{g}\,\mathrm{sn}(gt+h), \\ y &= -\frac{\beta}{g}\,\mathrm{cn}(gt+h), \\ z &= -\frac{\gamma}{gk^2}\,\mathrm{dn}(gt+h); \end{aligned}$$

les trois constantes d'intégration sont g, h, k. Sous une autre forme, les intégrales seront, A, B, C étant déterminées par les équations (2),

$$gt + h = \int_0^x \frac{A\,dx}{\sqrt{(A^2 - x^2)(A^2 - k'x^2)}},$$

$$-k'(gt+h) = \int_0^y \frac{B\,dy}{\sqrt{(B^2 - y^2)\left(B^2 - \frac{k^2}{k'^2}y^2\right)}},$$

$$-k'(gt+h) = \int_0^z \frac{C\,dz}{\sqrt{(C^2 - y^2)\left(\frac{y^2}{k'^2} - C^2\right)}}.$$

X. — Intégration de quelques systèmes.

1° Les équations

$$\frac{dx}{ax + by + cz + \ldots + \alpha} = \frac{dy}{a'x + b'y + c'z + \ldots + \alpha'} = \ldots$$

se ramènent aux équations linéaires en égalant cette suite de rapports à dt, ce qui donne

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \ldots + \alpha, \qquad \ldots;$$

Il suffit d'éliminer t entre les intégrales du nouveau système pour obtenir celles de l'ancien.

2° Les équations que l'on obtient en écrivant que le rayon de courbure d'une courbe plane est une fonction $f(s)$ de l'arc s sont

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = f(s),$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1;$$

on les intègre en posant $\frac{dx}{ds} = \cos i$, $\frac{dy}{ds} = \sin i$, et par suite

$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin i \frac{di}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds^2} = \cos i \frac{di}{ds}$; on a alors

$$\left(\frac{di}{ds}\right)^2 = f(s) \quad \text{et} \quad i = \int \sqrt{f(s)}\, ds,$$

et

$$x = \int \cos i\, ds, \qquad y = \int \sin i\, ds.$$

3° Les équations suivantes

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(s),$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \chi(s),$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \psi(s)$$

s'intègrent dès que l'on en connaît une solution, x_1, y_1, z_1. En effet, si l'on effectue une transformation de coordonnées

$$(\omega) \qquad \begin{cases} x = a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y = a' x_1 + b' y_1 + c' z_1, \\ z = a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1, \end{cases}$$

$a, b, c, \ldots$ désignant les neuf cosinus réductibles à trois, on trouve que

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

que

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2$$

et que

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = x_1''^2 + y_1''^2 + z_1''^2.$$

Les formules (ω) sont donc des solutions plus générales du système proposé : ce sont les plus générales, car l'élimination de y et x conduit à une équation en z du troisième ordre, et les solutions (ω) renferment trois constantes arbitraires.

Comme application, cherchons une courbe dont le rayon de courbure et le rayon de torsion soient constants. Les

équations du problème sont

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \text{const.},$$
$$x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \text{const.},$$

les dérivées des coordonnées x, y, z étant prises par rapport à l'arc. L'hélice satisfait à ces équations; donc l'hélice transportée d'une manière quelconque dans l'espace est la solution la plus générale.

Les équations d'une courbe tracée sur la sphère de rayon a et dont le rayon de courbure reste constant sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = a,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \text{const.},$$

et l'on en conclut que le cercle seul satisfait à la question.

XI. — Solution directe de deux problèmes résolus précédemment.

Problème I. — *Trouver une courbe dont le rayon de courbure et le rayon de torsion soient constants.*

Les équations du problème sont

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \tag{1}$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = a^2, \tag{2}$$

$$x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = b^2, \tag{3}$$

les accents désignant des dérivées relatives à l'arc s. De (1) on tire

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0; \tag{4}$$

puis, en différentiant et en tenant compte de (2),

$$x'x''' + y'y''' + z'z''' = -a^2; \tag{5}$$

en différentiant (2), on a

$$x''x''' + y''y''' + z''z''' = 0; \tag{6}$$

de (4) et (6) on tire

$$\frac{x''}{y'z'''-z'y'''}=\frac{y''}{z'x'''-x'z'''}=\frac{z''}{x'y'''-y'x'''}=\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

ou, en appelant g la constante $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\begin{aligned}
x''&=g(y'z'''-z'y'''),\\
y''&=g(z'x'''-x'z'''),\\
z''&=g(x'y'''-y'x''');
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
x'&=g(y'z''-z'y'')+\alpha,\\
y'&=g(z'x''-x'z'')+\beta,\\
z'&=g(x'y''-y'x'')+\gamma,
\end{aligned}$$

α, β, γ désignant des constantes. On en conclut, en multipliant la première par x', la seconde par y', la troisième par z',

$$1=\alpha x'+\beta y'+\gamma z',$$

$$(7)\qquad s=\alpha x+\beta y+\gamma z,$$

sans ajouter de constante, ce qui revient à choisir convenablement l'origine des arcs. Posons

$$\begin{aligned}
\xi&=\alpha x+\beta y+\gamma z,\\
\eta&=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z,\\
\zeta&=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z,
\end{aligned}$$

α, β, γ, ... désignant les neuf cosinus de la transformation des coordonnées. Rien n'empêche de supposer dans (7) que α, β, γ sont trois cosinus : il suffit pour cela de remplacer s par ks, k désignant une constante; α, β, γ seront alors liés par la relation $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$; mais alors (7) s'écrira

$$(8)\qquad \zeta=ks,\qquad \zeta'=k,\qquad \zeta''=0,$$

et les formules (1) et (2) donneront

$$\begin{aligned}
\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2&=1,\\
\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2&=a^2,
\end{aligned}$$

ou

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1 - k^2,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 = a^2.$$

Si l'on fait alors $\xi' = (1 - k^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi$, $\eta' = (1 - k^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi$, on a

$$(1 - k^2)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = a^2, \qquad \varphi = \frac{as}{\sqrt{1 - k^2}} + \text{const.}$$

et enfin

$$\xi' = \sqrt{1 - k^2} \cos \frac{as}{\sqrt{1 - k^2}}, \qquad \eta' = \sqrt{1 - k^2} \sin \frac{as}{\sqrt{1 - k^2}}.$$

En intégrant et en posant $\sqrt{1 - k^2} = h$, on a

$$\xi = \frac{h^2}{a} \sin \frac{as}{h}, \qquad \eta = -\frac{h^2}{a} \cos \frac{as}{h}, \qquad \zeta = ks;$$

ξ, η, ζ sont, comme l'on voit, les coordonnées d'une hélice ; la courbe cherchée elle-même est donc aussi une hélice.

Problème II. — *Trouver sur la sphère une courbe dont le rayon de courbure soit constant.*

Les équations du problème sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = b^2;$$

en procédant comme tout à l'heure, on trouvera

$$\frac{x'}{y''z - z''y} = \frac{y'}{z''x - x''z} = \frac{z'}{x''y - y''x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 - \left(\sum xx''\right)^2}},$$

mais $\sum xx' = 0$, $\sum xx'' = -\sum x'^2 = -1$; on peut donc écrire, en désignant par g une constante,

$$x' = g(y''z - z''y),$$
$$y' = g(z''x - x''z),$$
$$z' = g(x''y - y''x)$$

et, en intégrant,

$$\begin{aligned} x &= g(y'z - z'y) + \alpha, \\ y &= g(z'x - x'z) + \beta, \\ z &= g(x'y - y'x) + \gamma, \end{aligned}$$

α, β, γ désignant trois constantes; on en tire

$$a^2 = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

et l'on voit que la courbe cherchée est plane.

XII. — Équations intrinsèques d'une courbe gauche.

Des théories développées aux paragraphes précédents, il résulte qu'une courbe gauche est parfaitement déterminée de forme quand on se donne le rayon de courbure R et le rayon de torsion T en fonction de l'arc s; ainsi les relations

$$(1) \qquad R = \varphi(s), \qquad T = \psi(s)$$

déterminent sans ambiguïté la forme de la courbe; on leur donne le nom d'*équations intrinsèques* de la courbe.

Pour établir cette proposition, il suffit d'observer que les équations ordinaires de la courbe s'obtiendront en intégrant les équations

$$\left\{ \begin{aligned} & x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \\ & x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{R^2}, \\ & x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \frac{1}{T^2 R^2} + \frac{1}{R^4} + \left(\frac{d \frac{1}{R}}{ds} \right)^2, \end{aligned} \right.$$

où x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque de la courbe et où les accents servent à représenter des dérivées relatives à s. Si l'on considère x', y', z' comme des inconnues et si X', Y', Z' désignent une solution du système (2), on a vu que la solution la plus générale était

$$\begin{aligned} x' &= a X' + b Y' + c Z', \\ y' &= a' X' + b' Y' + c' Z', \\ z' &= a'' X' + b'' Y' + c'' Z', \end{aligned}$$

$a, b, c, \ldots$ désignant neuf cosinus directeurs d'une transformation de coordonnées rectangulaires quelconques ; on en tire

$$x = a\text{X} + b\text{Y} + c\text{Z} + x_0,$$
$$y = a'\text{X} + b'\text{Y} + c'\text{Z} + y_0,$$
$$z = a''\text{X} + b''\text{Y} + c''\text{Z} + z_0,$$

x_0, y_0, z_0 désignant trois constantes arbitraires. Ces équations sont les équations finies de la courbe cherchée : on voit que cette courbe est superposable à la courbe

$$x = \text{X}, \qquad y = \text{Y}, \qquad z = \text{Z},$$

ce qui démontre notre théorème.

Les équations intrinsèques d'une courbe gauche seront surtout utiles à considérer quand on voudra étudier les propriétés *intrinsèques* de la courbe, c'est-à-dire les propriétés qui ne tiennent aucun compte des relations de la courbe avec le monde extérieur.

XIII. — Théorème de Jacobi.

Soient

$$(1) \quad f_1(x, y, z, \ldots, x', y', z', \ldots) = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0 \quad \ldots$$

des équations différentielles simultanées,

$$(2) \quad \varphi_1(x, y, z, \ldots, c_1, c_2, \ldots) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \ldots$$

leurs intégrales, $y', z', \ldots$ désignant, pour abréger, $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots$ et $c_1, c_2, \ldots$ des constantes. Différentions les formules (1) par rapport à l'une des constantes c : nous aurons

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dc} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dc} + \ldots = 0, \qquad \ldots$$

ou bien, en posant $\frac{dy}{dc} = u, \frac{dz}{dc} = v, \ldots,$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} u + \frac{\partial f_1}{\partial z} v + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y'} u' + \frac{\partial f_1}{\partial z'} v' + \ldots = 0;$$

cette équation et ses analogues sont linéaires en $u, v, \ldots$; $u', v', \ldots$: leurs intégrales sont connues, ce sont les valeurs de $\frac{dy}{dc}, \frac{dz}{dc}, \ldots$.

Application. — L'équation $y'' = f'(y)$ a pour intégrale générale

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2f(y) + c}};$$

donc

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u f''(y) = 0$$

a pour intégrale $\frac{dy}{dc}$.

Vérification. — En posant $y'' = y$, on a $y = ce^x + c'e^{-x}$, et $u = e^x$ est une intégrale de

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0,$$

ce que l'on savait.

XIV. — Sur une équation étudiée par Jacobi.

L'équation dont il s'agit est la suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x\,dy - y\,dx)(a + bx + cy) \\ &\qquad - dy(a' + b'x + c'y) + dx(a'' + b''x + c''y) = 0. \end{aligned} \right.$$

On a très simplement rattaché la solution de cette équation à celle des équations simultanées

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au + bv + cw, \\ \frac{dv}{dt} &= a'u + b'v + c'w, \\ \frac{dw}{dt} &= a''u + b''v + c''w. \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont faciles à intégrer. Posons

$$(3)\qquad x = \frac{v}{u}, \qquad y = \frac{w}{u};$$

nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u\,dv - v\,du}{dt}\,\frac{1}{u^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{u\,dw - w\,du}{dt}\,\frac{1}{u^2}$$

et, par suite,

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a' + b'x + c'y - x(a + bx + cy), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a'' + b''x + c''y - y(a + bx + cy); \end{cases}$$

de ces deux équations on tire enfin, en multipliant la première par $\frac{dy}{dt}$, la seconde par $\frac{dx}{dt}$ et en soustrayant,

$$\begin{aligned} &(x\,dy - y\,dx)(a + bx + cy) \\ &\qquad - dy(a' + b'x + c'y) + dx(a'' + b''x + c''y) = 0. \end{aligned}$$

C'est précisément l'équation (1) : pour intégrer cette équation, on commencera donc par intégrer les équations (2); leurs intégrales sont de la forme

$$\begin{aligned} u &= A\,e^{st} + B\,e^{s't} + C\,e^{s''t}, \\ v &= A_1 e^{st} + B_1 e^{s't} + C_1 e^{s''t}, \\ w &= A_2 e^{st} + B_2 e^{s't} + C_2 e^{s''t}. \end{aligned}$$

s, s', s'' sont racines d'une équation du troisième degré facile à former. Sur les trois constantes A, A_1, A_2, une seule est arbitraire; les rapports $\frac{A_1}{A}$, $\frac{A_2}{A}$ sont déterminés; donc, dans $x = \frac{v}{u}$, $y = \frac{w}{u}$, il n'entrera plus que deux constantes arbitraires. L'élimination de t fera encore disparaître une constante, comme il est facile de le prouver. En effet,

$$x = \frac{A_1 e^{st} + B_1 e^{s't} + C_1 e^{s''t}}{A\,e^{st} + B\,e^{s't} + C\,e^{s''t}} = \frac{A_1 + B_1 e^{(s'-s)t} + C_1 e^{(s''-s)t}}{A + B e^{(s'-s)t} + C e^{(s''-s)t}};$$

si l'on pose $\frac{A_1}{A} = \alpha_1$, $\frac{B_1}{B} = \beta_1$, $\frac{C_1}{C} = \gamma_1$, $\frac{A_2}{A} = \alpha_2$, $\frac{B_2}{B} = \beta_2$, $\frac{C_2}{C} = \gamma_2$, $\frac{B}{A} = \beta$, $\frac{C}{A} = \gamma$, β et γ seront arbitraires, α_2, β_2, γ_2, α_1, β_1, γ_1 seront des constantes données. Si l'on fait de plus $s' - s = \sigma$, $s'' - s = \sigma'$, on aura

$$x = \frac{\alpha_1 + \beta_1 \beta e^{\sigma t} + \gamma_1 \gamma e^{\sigma' t}}{1 + \beta e^{\sigma t} + \gamma e^{\sigma' t}}, \qquad y = \frac{\alpha_2 + \beta_2 \beta e^{\sigma t} + \gamma_2 \gamma e^{\sigma' t}}{1 + \beta e^{\sigma t} + \gamma e^{\sigma' t}};$$

or on peut éliminer $\gamma e^{\sigma' t}$; en appelant u cette quantité, $\beta e^{\sigma t}$ sera $\frac{\beta}{\gamma^{\frac{\sigma}{\sigma'}}} u^{\frac{\sigma}{\sigma'}}$ et, après l'élimination, il ne restera plus que la constante $\frac{\beta}{\gamma^{\frac{\sigma}{\sigma'}}}$.

M. Fouret a intégré l'équation

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0,$$

dans laquelle L, M, N sont des fonctions homogènes de même degré, en posant

$$x = \frac{t}{z}, \qquad y = \frac{1}{z}$$

ou encore en posant

$$x = \frac{\cos\theta}{u}, \qquad y = \frac{\sin\theta}{u};$$

dans les deux cas, l'équation devient linéaire.

XV. — Équation intégrée par Lagrange.

Proposons-nous de trouver la développante de la courbe qui a pour équation

$$(1) \qquad \beta = \varphi(\alpha).$$

Appelons x, y les coordonnées d'un point de la développante et R le rayon du cercle osculateur de la courbe donnée : les

relations qui existent entre α, β, x, y sont, outre l'équation (1), les suivantes (p. 96, t. II)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2, \tag{2}$$

$$(x-\alpha) + y'(y-\beta) = 0, \tag{3}$$

$$1 + y'^2 + y''(y-\beta) = 0. \tag{4}$$

L'équation différentielle de la développante s'obtient en éliminant α et β entre (1), (3), (4) ou, si l'on veut, α, β, R entre (1), (2), (3), (4) ou enfin α et R entre

$$(x-\alpha)^2 + [y-\varphi(\alpha)]^2 = R^2, \tag{5}$$

$$(x-\alpha) + y'[y-\varphi(\alpha)] = 0, \tag{6}$$

$$1 + y'^2 + y''[y-\varphi(\alpha)] = 0. \tag{7}$$

Or (6) est la dérivée de (5), et (7) la dérivée de (6) prise en laissant α constant; donc la résultante ou l'équation de la développante

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = \varphi\left(x - y'\,\frac{1+y'^2}{y''}\right) \tag{8}$$

doit avoir pour intégrale générale l'équation (5), et, par conséquent, on doit conclure de là que les développantes cherchées constituent une solution singulière de l'équation (8) avec une seule constante arbitraire.

Voici comment Lagrange intègre l'équation (8), dans son deuxième Mémoire sur les solutions particulières (IV[e] Vol. de ses *Œuvres*).

Posons

$$x - y'\,\frac{1+y'^2}{y''} = \alpha; \tag{9}$$

il en résultera

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = \varphi(\alpha); \tag{10}$$

ces équations étant différentiées donnent

$$dx - y'' dx \frac{1 + y'^2}{y''} - y' d \frac{1 + y'^2}{y''} = d\alpha,$$

$$y' dx + d \frac{1 + y'^2}{y''} = \varphi'(\alpha) d\alpha;$$

en multipliant la seconde par y' et en ajoutant, on a, réductions faites,

$$d\alpha [1 + y' \varphi'(\alpha)] = 0;$$

cette équation se décompose en deux

(11) $$d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad 1 + y' \varphi'(\alpha) = 0.$$

Examinons d'abord l'hypothèse $d\alpha = 0$ ou $\alpha = \text{const.}$: l'équation (10) donne alors

$$[y - \varphi(\alpha)] y'' + 1 + y'^2 = 0$$

et, en intégrant,

$$y' [y - \varphi(\alpha)] + (x + c) = 0,$$

c désignant une constante; mais, en vertu de (9) et (10), pour $x = \alpha$, on a $y = \varphi(\alpha)$; donc $c = -\alpha$, et l'on a

$$y' [y - \varphi(\alpha)] + (x - \alpha) = 0$$

ou, en intégrant et en appelant R une constante,

$$[y - \varphi(\alpha)]^2 + (x - \alpha)^2 = R^2;$$

l'intégrale générale de l'équation (8) est donc représentée par des cercles quelconques ayant leur centre sur la courbe

$$\beta = \varphi(\alpha).$$

Examinons maintenant la seconde équation (11)

(12) $$\varphi'(\alpha) = -\frac{1}{y'};$$

si entre (9) et (10) on élimine y'', on a

$$x - \alpha + y' [y - \varphi(\alpha)] = 0$$

ou bien

$$y-\varphi(\alpha)+\frac{x-\alpha}{y'}=0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (12),

$$y-\varphi(\alpha)-(x-\alpha)\varphi'(\alpha)=0.$$

Mais α est une fonction donnée de y'; on aura donc

$$y-\Phi(y')-[x-\theta(y')]\Psi(y')=0;$$

cette équation est du premier ordre; son intégrale, facile à obtenir (p. 89 et suiv.), est l'équation des développantes de $\beta=\varphi(\alpha)$.

EXERCICES ET NOTES.

1. Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt}=-y,\qquad \frac{dy}{dt}=u,\qquad \frac{du}{dt}=-v,\qquad \frac{dv}{dt}=x.$$

2. Intégrer le système

$$\begin{gathered} y=xy'+\varphi(y', z', \ldots), \\ z=xz'+\psi(y', z', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

dans lequel on a posé $y'=\frac{dy}{dx}$, $z'=\frac{dz}{dx}$, ...

3. Intégrer le système

$$\begin{gathered} y=x\,\varphi_1(x', y', \ldots)+\varphi_2(x', y', \ldots), \\ z=x\,\chi_1(x', y', \ldots)+\chi_2(x', y', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

dans lequel $y'=\frac{dy}{dx}$, $z'=\frac{dz}{dx}$, ...

4. Trouver une courbe dont la normale principale soit parallèle à un plan fixe (hélice).

5. Trouver une courbe coupant les génératrices d'un cône droit à base circulaire sous un angle constant (hélice cylindro-conique).

6. Trouver deux familles de courbes orthogonales, telles qu'en

leurs points de croisement le produit de leurs courbures soit constant, ou telles que leurs courbures soient égales.

7. Trouver sur un ellipsoïde une courbe dont le rayon de courbure soit perpendiculaire au rayon vecteur issu du centre. (Faire usage des fonctions elliptiques.)

8. Trouver sur un ellipsoïde une courbe telle que la projection de son rayon de courbure sur le plan tangent à la surface soit constante.

9. Trouver une courbe qui coupe à angle droit toutes les sections normales d'un ellipsoïde passant par un point pris sur cette surface. (Cas où ce point est un sommet.)

10. Intégrer le système

$$\frac{dx}{X + Tx} = \frac{dy}{Y + Ty} = \frac{dz}{Z - Tz},$$

où T, X, Y, Z sont des fonctions linéaires de x, y, z. $\left(\text{Poser } x = \frac{x'}{t},\ y = \frac{y'}{t},\ z = \frac{z'}{t}.\right)$

11. Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des polynômes du second degré,

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)\psi(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)\psi(y)}}$$

a pour intégrale

$$\frac{\sqrt{\varphi(x)\psi(y)} - \sqrt{\varphi(y)\psi(x)}}{x - y} = \text{const.}$$

(Laguerre, *Bulletin de la Société philomathique*, 1870.)

12. Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} = x\varphi'(t) - y\psi'(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = x\psi'(t) + y\varphi'(t).$$

(*Concours de licence*, 1874.)

13. Intégrer

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{(x-y)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{(x-y)^2}.$$

(*Concours de licence*, juillet 1875.)

14. Intégrer

$$\frac{dy}{dx} = z \operatorname{dn} x, \qquad \frac{dz}{dx} = -y \operatorname{dn} x.$$

15. L'équation $(\alpha M + \beta N)(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$, dans laquelle α et β désignent des constantes et M, N des fonctions homogènes de même degré p, a pour facteur d'intégrabilité $\dfrac{(\alpha x + \beta y + 1)^{p+1}}{My - Nx}$.

(Fouret, *Comptes rendus*, t. CII, p. 418.)

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES.

I. — Définitions.

On appelle *fraction continue* toute expression de la forme

$$(1) \qquad b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 \ldots}}}$$

limitée ou illimitée. Posons

$$(2) \qquad F_1^n = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 \ldots + \cfrac{a_n}{b_n}}};$$

$b_0 + F_1^n$ est ce que l'on appelle la $n^{\text{ième}}$ *réduite* de la fraction continue, $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$ sont les *fractions intégrantes*.

Lorsque F_1^n tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, on dit que la fraction continue est *convergente*, et $b_0 + \lim F_1^n$ est ce que l'on appelle sa *valeur*. Une fraction continue non convergente est *divergente*.

$b_0 + F_1^\infty, F_2^\infty, \ldots, F_n^\infty$ sont ce que l'on appelle, le premier, le second, ..., le $n^{\text{ième}}$ *quotient complet*.

II. — Formation des réduites.

La première réduite de la fraction (1), considérée au para-

graphe précédent, est $\frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}$; la seconde est

$$\frac{(b_0 b_1 + a_1) b_2 + b_0 a_2}{b_1 b_2 + a_2},$$

et l'on soupçonne déjà une loi de formation. Si l'on désigne, en général, par P_n le numérateur et par Q_n le dénominateur de la n^{ieme} réduite, on est porté à écrire

$$(3) \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}}{Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}}.$$

Cette formule se vérifie bien facilement, en montrant que, si elle a lieu pour une valeur de n et pour toute valeur inférieure, elle aura lieu pour une valeur supérieure d'une unité. Pour démontrer cela, il suffit d'observer que l'on passe de $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ à $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$ en changeant b_{n+1} en $b_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}$; on a donc, en admettant la formule (3),

$$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} = \frac{P_n \left(b_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}\right) + P_{n-1} a_{n+1}}{Q_n \left(b_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}\right) + Q_{n-1} a_{n+1}}$$

ou

$$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} = \frac{(P_n b_{n+1} + P_{n-1} a_{n+1}) b_{n+2} + P_n a_{n+2}}{(Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}) b_{n+2} + Q_n a_{n+2}}$$
$$= \frac{P_{n+1} b_{n+2} + P_n a_{n+2}}{Q_{n+1} b_{n+2} + Q_n a_{n+2}};$$

la loi de formation se maintient donc pour l'indice $n+1$, et, comme cette loi se vérifie directement pour les indices 1, 2, 3, ..., elle est générale.

En résumé, on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_0 = b_0, & Q_0 = 1 \\ P_1 = b_0 b_1 + a_1 = P_0 b_1 + a_1, & Q_1 = b_1, \\ P_2 = P_1 b_2 + P_0 a_2, & Q_2 = Q_1 b_2 + Q_0 a_2, \\ P_3 = P_2 b_3 + P_1 a_3, & Q_3 = Q_2 b_3 + Q_1 a_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{n+1} = P_n b_{n+1} + P_{n-1} b_{n+1}, & Q_{n+1} = Q_n b_{n+1} + Q_{n-1} a_{n+1}. \end{array} \right.$$

THÉORÈME I. — *On a*

$$(5) \qquad P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{n+1}.$$

En effet, en vertu de (4), on a

$$\begin{aligned} P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = &\quad (P_n b_{n+1} - P_{n-1}a_{n+1})Q_n \\ &- (Q_n b_{n+1} - Q_{n-1}a_{n+1})P_n \\ &= (-1)\,a_{n+1}(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) \\ &= (-1)^2 a_{n+1}a_n(P_{n-1}Q_{n-2} - Q_{n-1}P_{n-2}) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= (-1)^{n-1}a_{n+1}a_n \ldots a_3(P_2Q_1 - Q_2P_1). \end{aligned}$$

Mais $P_2Q_1 - Q_2P_1 = -a_1a_2$: la formule (5) est donc démontrée.

THÉORÈME II. — *On a*

$$(6) \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Cela résulte de la formule (5).

III. — Conversion des fractions continues en série.

Pour voir si une fraction continue est convergente, on la convertit en série comme il suit; conservant les notations des paragraphes précédents, on a

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} + \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \ldots + \frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} + \frac{P_0}{Q_0}$$

ou bien

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_0}{Q_0} + \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0}\right) + \ldots + \left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de (6),

$$(7) \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1a_2}{Q_1Q_2} + \frac{a_1a_2a_3}{Q_2Q_3} - \ldots + \frac{(-1)^n a_1a_2\ldots a_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}};$$

la réduite de rang $n+1$ est donc la somme des $n+1$ premiers termes d'une série : si cette série est convergente, la

fraction continue elle-même sera convergente. Voici quelques théorèmes que l'on peut en déduire :

Si $a_1 = a_2 = \ldots = x$, x désignant un nombre positif plus petit ou égal à un, et si $b_1, b_2, \ldots$ sont des nombres au moins égaux à l'unité, la fraction continue sera convergente, car elle pourra être convertie en une série de la forme

$$\frac{x}{B_1} + \frac{x^2}{B_2} + \ldots + \frac{x^n}{B_n} + \ldots,$$

$B_1, B_2, \ldots$ étant des nombres croissants.

En particulier, si $a_1 = a_2 = \ldots = 1$, et si $b_1, b_2, \ldots$ sont des nombres entiers positifs, la fraction continue sera convergente.

On a fait servir réciproquement la formule (7) à la conversion des séries en fractions continues; nous laissons au lecteur le soin de développer cette théorie, dont l'utilité est contestable.

IV. — Utilité des fractions continues en Arithmétique.

Les fractions continues dont les numérateurs sont égaux à l'unité et dont les dénominateurs sont entiers jouent un rôle important dans la théorie des nombres et dans la théorie des approximations numériques.

THÉORÈME I. — *Tout nombre commensurable ou incommensurable peut être développé en fraction continue dont les numérateurs sont l'unité, et dont les dénominateurs sont des entiers positifs.*

Le développement n'est possible que d'une seule manière; il est limité pour les nombres commensurables, illimité pour les nombres incommensurables.

En effet, appelons $E(x)$ le plus grand entier contenu dans x : on a identiquement

$$x = E(x) + y,$$

y désignant un nombre inférieur à un, bien déterminé; or ce nombre peut être représenté par $\frac{1}{x_1}$, x_1 désignant un nombre supérieur à un. Ainsi l'on peut poser

$$x = E(x) + \frac{1}{x_1};$$

de même

$$x_1 = E(x_1) + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = E(x_2) + \frac{1}{x_3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

x_2, x_3, ... désignant des nombres plus grands que un. Il en résulte

$$x = E(x) + \cfrac{1}{E(x_1) + \cfrac{1}{E(x_2) \ddots + \cfrac{1}{x_n}}}.$$

Si x_n est entier, la fraction continue s'arrête; si, quel que soit n, jamais x_n n'est entier, la fraction continue se prolonge indéfiniment et elle est convergente : x est alors incommensurable. Il est facile, en effet, de prouver que, si x est de la forme $\frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers, le développement se termine; en effet, dans ce cas, l'un des nombres x_n sera le plus grand commun diviseur de p et q. On peut d'ailleurs généraliser ce théorème :

Théorème II. — *La fraction continue*

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}$$

dans laquelle en valeur absolue on a toujours

$$a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2, \quad \dots, \quad a_n < b_n, \quad \dots,$$

a_1, a_2, ..., b_1, ... étant entiers, est le développement d'un nombre incommensurable : ce théorème est soumis à une exception.

En effet, appelons F_1, F_2, ..., F_n les réduites successives : F_1 en valeur absolue est moindre que 1 : comme $\frac{a_2}{b_2}$ est moindre que 1 et que a_1 est entier, F_2 sera encore moindre que 1 en valeur absolue : on verrait de même que

$$\frac{a_2}{b_2+\frac{a_3}{b_3}} < 1 :$$

donc F_3 sera moindre que 1 et ainsi de suite. Cela ne veut pas dire que F_n n'aura pas pour limite un ; mais, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que

$$\frac{a_2}{b_2+\frac{a_3}{b_3+\dots}}$$

eût précisément pour limite 1, et que $b_1 = a_1 + 1$, de même que le quotient complet suivant eût pour limite 1 et que $b_2 = a_2 + 1$, ... En supposant donc que l'on n'ait pas en valeur absolue $b_1 = a_1 + 1$, $b_2 = a_2 + 1$, ..., la limite de la fraction considérée ne sera pas égale à 1 ; encore faudrait-il que l'on eût $\frac{b_2}{a_2} < 0$, $\frac{b_3}{a_3} < 0$, ..., en supposant $\frac{b_1}{a_1} < 0$. Mettons donc ce cas de côté, je dis que, si la fraction considérée est convergente, elle représentera un nombre incommensurable.

Désignons, en effet, la valeur de la fraction par $\frac{B}{A}$; si cette valeur est commensurable, on pourra supposer A et B entiers et premiers entre eux. Désignons par $\frac{C}{B}$ le second quotient complet ; on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{a_2}{b_2+\frac{C}{B}},$$

d'où

$$a_2 A - b_2 B = C;$$

on en conclut que C est entier : la troisième réduite pourra de même être représentée par $\frac{D}{C}$, D étant entier, et ainsi de suite. Si donc A et B sont entiers, on voit que l'on pourra trouver des nombres entiers A, B, C, D, ..., indéfiniment décroissants, ce qui est absurde.

Ce théorème sera utilisé plus loin dans diverses circonstances.

V. — Approximations numériques.

Si l'on considère la fraction continue

$$\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots \cfrac{1}{b_n + \ddots}}}$$

dans laquelle b_1, b_2, ... sont des entiers positifs, et que l'on désigne par $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, ... les réduites successives, on aura (p. 323)

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (-1)^n,$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n+1}};$$

donc :

Théorème I. — *La différence entre deux réduites consécutives tend vers zéro.*

Théorème II. — *La fraction est toujours comprise entre deux réduites consécutives.*

En effet (p. 323), son développement en série est

$$\frac{P_1}{Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \ldots;$$

les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs et décroissants ; les sommes des deux premiers, ..., des n premiers donnent la deuxième, la troisième, ... la $n^{\text{ième}}$ réduite ; donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème III. — *De toutes les fractions irréductibles approchant de la valeur de la fraction continue, les plus simples sont les réduites successives.*

D'abord la réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ est irréductible, car la formule

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n = 1$$

montre que P_n et Q_n ne sauraient avoir de diviseur commun, ce diviseur devant appartenir à $P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n$. De plus, en appelant f la valeur de la fraction, on a, par exemple,

$$\frac{P_n}{Q_n} > f > \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}};$$

la différence entre f et l'une des fractions réduites entre lesquelles elle est comprise est moindre que la différence de ces fractions ou que $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$. Soit $\frac{p}{q}$ une fraction approchant de f plus que $\frac{P_n}{Q_n}$ ou $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$; sa différence avec f devra être moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$; mais sa différence avec $\frac{P_n}{Q_n}$ devra être aussi moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$. Or

$$\frac{p}{q} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{pQ_n - qP_n}{Q_n q};$$

pour que cette différence soit moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$, il faut que $q > Q_{n+1}$; la fraction $\frac{p}{q}$ sera donc plus compliquée que $\frac{P_n}{Q_n}$ ou que $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, puisqu'elle aura un dénominateur plus grand que celui de chacune de ces fractions : le théorème se trouve donc démontré.

De là un moyen de se procurer les fractions les plus simples qui approchent d'un nombre donné commensurable ou incommensurable.

Pour bien faire saisir l'utilité de la théorie qui précède, je citerai seulement un cas dans lequel elle est appliquée. Je suppose que l'on veuille que le rapport des vitesses de deux roues d'engrenage soit a : le rapport du nombre de dents de ces deux roues devra être a; si a est un nombre incommensurable ou seulement une fraction irréductible de dénominateur très grand, il conviendra de remplacer a par une fraction irréductible s'approchant le plus possible de a; cette fraction sera fournie par la théorie précédente.

Application. — Le nombre π réduit en fraction continue est

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Les réduites successives sont les nombres bien connus

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \ldots$$

VI. — Résolution de l'équation indéterminée du premier degré.

Supposons que a et b soient premiers entre eux : réduisons $\frac{a}{b}$ en supposant $b > a$ en fraction continue; soit $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ l'avant-dernière réduite; on aura, en observant que $\frac{a}{b}$ est la dernière,

$$P_{n-1} b - Q_{n-1} a = \pm 1.$$

Il résulte de là que, *a et b étant deux nombres premiers entre eux, il existe toujours des nombres entiers, tels que*

$$ax - by = 1.$$

Ceci posé, proposons-nous de résoudre en nombres entiers l'équation

$$(1)\qquad \alpha x + \beta y = \gamma.$$

On peut supposer que l'on ait enlevé tous les facteurs communs à α, β, γ; alors α et β, α et γ, β et γ ne sauraient avoir de facteurs communs, et il sera toujours possible de trouver des nombres x' et y', tels que

$$\alpha x' + \beta y' = 1.$$

En prenant $x = \gamma x'$, $y = \gamma y'$, on aura satisfait à l'équation (1). Soit x_0, y_0 une solution de (1) : on aura

$$\alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma$$

et, en retranchant de (1),

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

ou

$$(2)\qquad \frac{x - x_0}{\beta} = \frac{y - y_0}{-\alpha}.$$

En égalant ces rapports à t, on a

$$x = x_0 + \beta t, \qquad y = y_0 - \alpha t;$$

pour que x et y soient entiers, il faut et il suffit que t soit entier; les fractions (2) ayant leurs dénominateurs premiers entre eux ne peuvent être égales qu'à cette condition.

VII. — Autre application à l'Arithmétique.

Nous avons montré (T. IV, p. 217) que, étant donnés deux nombres a, b, il existait des entiers m et n satisfaisant à l'inégalité

$$am + bn \leq \varepsilon.$$

On peut trouver ces entiers assez simplement comme il suit : développons $\frac{a}{b}$ en fraction continue, en prenant pour numéra-

teurs des fractions intégrantes l'unité et, pour dénominateurs, des entiers positifs. Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite de rang n, on aura, en valeur absolue,

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$$

et, par conséquent,

$$P_n b - Q_n a < \frac{b}{Q_{n+1}};$$

or on peut toujours prendre n assez grand pour que Q_{n+1} satisfasse à l'inégalité

$$\frac{b}{Q_{n+1}} < \varepsilon,$$

et alors on aura *a fortiori*

$$P_n b - Q_n a < \varepsilon;$$

on satisfera donc à l'inégalité proposée, considérée en valeur absolue, en prenant

$$m = -Q_n, \qquad n = P_n.$$

VIII. — Développement d'une fonction rationnelle.

Soient $f(x)$ et $f_1(x)$ deux fonctions entières de x sans facteur commun, le degré de f surpassant celui de f_1; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les racines de $f(x) = 0$. Divisons f par f_1 : soient $Q_1(x)$ le quotient et $-f_2$ le reste ; divisons f_1 par f_2 : soient $Q_2(x)$ le quotient et $-f_3$ le reste, etc. ; on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} f = f_1 Q_1 - f_2, & \dfrac{f}{f_1} = Q_1 - \dfrac{f_2}{f_1}, \\ f_1 = f_2 Q_2 - f_3, & \dfrac{f_1}{f_2} = Q_2 - \dfrac{f_3}{f_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-2} = f_{n-1} Q_{n-1} - f_n, & \dfrac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = Q_{n-1} - \dfrac{f_n}{f_{n-1}}. \end{array}\right.$$

On en conclut la formule

$$(2)\qquad \frac{f_1}{f} = \cfrac{1}{Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \ldots \cfrac{1}{Q_n}}},$$

en posant $\frac{f_{n-1}}{f_n} = Q_n$; f_n est une constante; on voit ainsi que l'on peut toujours réduire une fonction rationnelle en fraction continue.

Soient maintenant $\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \ldots$ les réduites successives de la fraction continue (2) : on a d'abord les formules connues

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{N_1}{D_1} = \dfrac{1}{Q_1}, \\ \dfrac{N_2}{D_2} = \dfrac{Q_2}{Q_1 Q_2 - 1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ N_{i+1} = N_i Q_{i+1} - N_{i-1}; \\ D_{i+1} = D_i Q_{i+1} - D_{i-1}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad N_{i+1} D_i - D_{i+1} N_i = 1,$$

et, en particulier, comme on a $\frac{N_n}{D_n} = \frac{f_1}{f}$,

$$(5)\qquad f D_{n-1} - f_1 N_{n-1} = 1;$$

mais ceci suppose, bien entendu, que f et f_1 n'ont pas de facteur commun, sans quoi l'on aurait $f D_{n-1} - f_1 N_{n-1} = 0$, d'après la théorie de l'élimination.

On a ensuite, en vertu de (4),

$$(6)\qquad \frac{N_{i+1}}{D_{i+1}} - \frac{N_i}{D_i} = \frac{1}{D_i D_{i+1}};$$

donc

$$\frac{f_1}{f} = \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_1}{D_1} + \left(\frac{N_2}{D_2} - \frac{N_1}{D_1}\right) + \ldots + \left(\frac{N_n}{D_n} - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}\right)$$

ou, en vertu de (6),

$$(7)\qquad \frac{f_1}{f} = \frac{N_1}{D_1} + \frac{1}{D_1 D_2} + \frac{1}{D_2 D_3} + \ldots + \frac{1}{D_n D_{n-1}},$$

ce qui permet de calculer $\frac{f}{f_1}$ sans passer par les N_i.

Remarque. — Les fractions $\frac{N_i}{D_i}$ sont irréductibles ; cela résulte immédiatement de la formule (4).

On a, en vertu des formules (1),

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 Q_1 - f, \\ f_3 &= f_2 Q_2 - f_1, \\ f_4 &= f_3 Q_3 - f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} f_3 &= (f_1 Q_1 - f) Q_2 - f_1 = f_1 (Q_1 Q_2 - 1) - f Q_2, \\ f_4 &= [f_1 (Q_1 Q_2 - 1) - f Q_2] Q_3 - f_1 Q_1 + f \\ &= f_1 (Q_1 Q_2 Q_3 - Q_1 - Q_3) - f (Q_2 Q_3 - 1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou bien

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} f_3 &= f_1 D_2 - f N_2, \\ f_4 &= f_1 D_3 - f N_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{i+1} &= f_1 D_i - f N_i. \end{aligned} \right.$$

Pour vérifier cette dernière formule, on part de

$$f_{i+1} = f_i Q_i - f_{i-1},$$

et en remplaçant f_i par $f_1 D_{i-1} - f N_{i-1}$, et f_{i-1} par

$$f_1 D_{i-2} - f N_{i-2},$$

on a

$$f_{i+1} = (f_1 D_{i-1} - f N_{i-1}) Q_i - (f_1 D_{i-2} - f N_{i-2})$$

ou bien

$$f_{i+1} = f_1 D_i - f N_i;$$

donc, en supposant la formule vraie jusqu'à l'indice i, elle se vérifie pour l'indice $i+1$: donc elle est générale.

De (8) on tire

$$\frac{f_1}{f} = \frac{f_{i+1}}{D_i f} + \frac{N_i}{D_i};$$

donc $\frac{N_i}{D_i}$ ne diffère de $\frac{f_1}{f}$ que par une fraction $\frac{f_{i+1}}{D_i f}$, dont le numérateur est de degré $n-i-1$, et le dénominateur de degré $n+i$ en supposant le degré de f_1, égal à $n-1$ pour fixer les idées; donc :

Les développements de $\frac{f_1}{f}$ et de $\frac{N_i}{D_i}$ suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ ne diffèrent qu'à partir des termes en $\frac{1}{x^{2i}}$.

IX. — Expression des polynômes D_i.

On a, d'après un théorème connu, f_i étant de degré $n-i$,

$$\mathcal{E}\frac{f_{i+1}}{f} = 0, \qquad \mathcal{E}\frac{x f_{i+1}}{f} = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{E}\frac{x^i f_{i+1}(x)}{f} = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0},$$

φ_i désignant le coefficient de x^{n-i} dans f_i. Or, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \ldots$ désignant les racines de $f(x)=0$, ces équations pourront s'écrire

$$\sum \frac{f_{i+1}(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

$$\sum \frac{\alpha f_{i+1}(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum \frac{\alpha^i f_{i+1}(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0};$$

mais les formules (8) donnent, pour $x=\alpha$,

$$(8\,bis) \quad f_2(\alpha) = f_1(\alpha)D_1(\alpha), \quad \ldots, \quad f_{i+1}(\alpha) = f_1(\alpha)D_i(\alpha);$$

les formules précédentes peuvent donc être remplacées par

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \frac{D_i(x) f_1(x)}{f'(x)} = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\sum \frac{D_i(x) x f_1(x)}{f'(x)} = 0,\\ &\sum \frac{D_i(x) x^i f_1(x)}{f'(x)} = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0}. \end{aligned}\right.$$

Si alors on pose, pour un instant,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &D_i = c_0 x^i + c_1 x^{i-1} + \dots + c_i,\\ &\sum \frac{x^\mu f_1(x)}{f'(x)} = t_\mu, \end{aligned}\right.$$

les formules (9) deviendront

$$\begin{aligned} &c_i t_0 + c_{i-1} t_1 + \dots + c_0 t_i = 0,\\ &c_i t_1 + c_{i-1} t_2 + \dots + c_0 t_{i+1} = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &c_i t_i + c_{i-1} t_{i+1} + \dots + c_0 t_{2i} = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0}; \end{aligned}$$

l'élimination des c entre ces équations et (10) donne

$$(11)\qquad D_i = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0} \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_i\\ t_1 & t_2 & \dots & t_{i+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{i-1} & t_i & \dots & t_{2i-1}\\ 1 & x & \dots & x^i \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_i\\ t_1 & t_2 & \dots & t_{i+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{i-1} & t_i & \dots & t_{2i-1}\\ t_i & t_{i+1} & \dots & t_{2i} \end{vmatrix}$$

Nous poserons

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_i\\ t_1 & t_2 & \dots & t_{i+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_i & t_{i+1} & \dots & t_{2i} \end{vmatrix} = T_i;$$

alors on aura

$$D_i = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0}\,\frac{T_{i-1}}{T_i}\,x^i + \dots$$

et, en appelant δ_i le coefficient de x^i dans D_i,

(13) $$\delta_i = \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0}\,\frac{T_{i-1}}{T_i}.$$

Les formules (8) donnent

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_1 D_i - f N_i, \\ f_i &= f_1 D_{i-1} - f N_{i-1}; \end{aligned}$$

d'où

$$f_{i+1} D_{i-1} - f_i D_i = -f(D_{i-1} N_i - N_{i-1} D_i),$$

ou, en vertu de (4),

$$f_i D_i - f_{i+1} D_{i-1} = f.$$

Égalant de part et d'autre les coefficients de x^n,

$$\varphi_i \delta_i = \varphi_0$$

ou, en vertu de (13),

(14) $$\varphi_i \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_0}\,\frac{T_{i-1}}{T_i} = \varphi_0;$$

mais, en appelant q_i le coefficient de x dans Q_i, comme on a

$$f_i = f_{i+1} Q_{i+1} - f_{i+2},$$

en égalant les coefficients de x^i, on trouve

$$\varphi_i = \varphi_{i+1} q_{i+1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}} = q_{i+1}$$

la formule (14) devient alors

(15) $$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}} = \frac{\varphi_0^2}{\varphi_{i+1}^2}\,\frac{T_i}{T_{i-1}} = q_{i+1}.$$

X. — Formules de M. Rouché.

On a

$$\mathcal{E}\,\frac{D_i f_k}{f} = \begin{cases} 0 & \text{si } i - k + 1 < 0, \\ \dfrac{\delta_i \varphi_k}{\varphi_0} & \text{si } i - k + 1 = 0, \end{cases}$$

ce qui revient à [*voir* formules (13) et (8 *bis*)]

$$\sum \frac{D_i(x)D_{k-1}(x)f_1(x)}{f'(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i-(k-1) < 0, \\ \dfrac{\varphi_{i-1}}{\varphi_0^2}\,\dfrac{T_{i-1}}{T_i}\,\varphi_k & \text{si } i-(k-1) = 0. \end{cases}$$

Si l'on fait alors $k - 1 = j$ et si l'on a égard à (15), on trouve

(16) $$\sum \frac{D_i(x)D_j(x)f_1(x)}{f'(x)} = 0 \quad \text{si } i \gtrless j,$$

(17) $$\sum \frac{D_i^2(x)f_1(x)}{f'(x)} = \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Ce sont les formules données par M. Rouché dans le XXXVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

XI. — Développement d'un polynôme suivant les D_i.

Voici une application que M. Rouché a faite de ses formules :

Soit $\varpi(x)$ un polynôme du degré $n - 1$, on peut poser

(18) $$\varpi(x) = A_0\,D_0(x) + A_1\,D_1(x) + \ldots + A_{n-1}\,D_{n-1}(x),$$

$D_0(x)$ désignant l'unité. On a, en particulier,

$$\varpi(x) = A_0 D_0(x) + A_1 D_1(x) + \ldots + A_{n-1} D_{n-1}(x),$$

d'où

$$\sum \frac{\varpi(x)D_i(x)f_1(x)}{f'(x)} = \sum A_0 \frac{D_0(x)D_i(x)f_1(x)}{f'(x)} + \ldots;$$

c'est-à-dire, en vertu de (16) et (17),

$$\sum \frac{\varpi(x)D_i(x)f_1(x)}{f'(x)} = \frac{A_i}{q_{i+1}};$$

d'où l'on tire A_i, et la formule (18) devient

(19) $$\varpi(x) = \sum_{i=0}^{i=n} q_{i+1} D_i(x) \sum \frac{\varpi(x)D_i(x)f_1(x)}{f'(x)}$$

XII. — Développement en fraction continue d'une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.

Considérons la fonction $\theta(x)$ développable comme il suit en série convergente ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$

$$(1) \qquad \theta(x) = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} + \ldots,$$

et proposons-nous de trouver une fraction rationnelle

$$(2) \qquad \frac{a_0 x^{i-1} + a_1 x^{i-2} + \ldots + a_{i-1}}{b_0 x^i + b_1 x^{i-1} + \ldots + b_i} = \frac{\mathrm{N}_i(x)}{\mathrm{D}_i(x)},$$

qui, développée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, ne diffère de la série (1) que par des termes de l'ordre le plus élevé que l'on pourra en $\frac{1}{x}$. Soit donc

$$\frac{\mathrm{N}_i}{\mathrm{D}_i} = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots;$$

on aura, en chassant le dénominateur D_i et remplaçant $\frac{\mathrm{N}_i}{\mathrm{D}_i}$ par sa valeur,

$$a_0 x^{i-1} + a_1 x^{i-2} + \ldots = (b_0 x^i + b_1 x^{i-1} + \ldots)\left(\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \ldots\right).$$

En égalant de part et d'autre les coefficient des diverses puissances de x, on a, en s'occupant d'abord des puissances négatives,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_0 b_i + c_1 \; b_{i-1} + \ldots + c_i \; b_0 = 0, \\ c_1 b_i + c_2 \; b_{i-1} + \ldots + c_{i+1} \; b_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_i b_i + c_{i+1} b_{i-1} + \ldots + c_{2i+1} b_0 = 0; \end{array} \right.$$

la considération des puissances positives donne

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} c_0 b_{i-1} + c_1 b_{i-2} + \ldots + c_{i-1} b_0 = a_{i-1}, \\ c_0 b_{i-2} + c_1 b_{i-3} + \ldots + c_{i-2} b_0 = a_{i-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_0 b_0 = a_0. \end{array}\right.$$

Les équations (3) sont au nombre de $i+1$; mais, si l'on veut que b_0, b_1, ... ne soient pas nuls, il faut faire abstraction de la dernière, et alors b_0, b_1, ... ne sont déterminés qu'à un facteur constant près ; quant à a_0, a_1, ..., ils seront donnés par les formules (4); on voit ainsi que l'on peut se donner $c_0 = s_0$, $c_1 = s_1$, ..., $c_{2i} = s_{2i}$, et que l'on aura d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_i \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_i & c_{i+1} & \ldots & c_{2i+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Puisque l'on peut satisfaire aux formules $c_0 = s_0$, ..., $c_{2i} = s_{2i}$, on voit que $\frac{N_i}{D_i}$ pourra ne différer de $\theta(x)$ que par les termes d'ordre $2i+1$ et d'ordre supérieur. Mais, pour que l'on puisse trouver des valeurs admissibles pour N_i et D_i, il faut que tous les mineurs de

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_i \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{i-1} & s_i & \ldots & s_{2i-1} \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_i \end{vmatrix} = s,$$

à savoir $\frac{\partial s}{\partial x_0}, \frac{\partial s}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial s}{\partial x_i}$, ne soient pas nuls.

Ceci revient à supposer que la série (1) n'est pas récurrente, et que $\theta(x)$ n'est pas rationnelle. Si entre les i premières équations (3), où l'on remplace c par s, et la formule

$$D_i = b_0 x^i + b_1 x^{i-1} + \ldots + b_i,$$

on élimine les b, on trouvera, à un facteur constant près,

$$(5) \qquad D_i = G_i \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_i \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-1} \\ 1 & x & \dots & x^i \end{vmatrix}.$$

Nous adopterons cette formule en prenant le facteur constant égal à G_i; N_i s'en déduira. On a alors, à des facteurs constants près,

$$D_0 = s_0, \qquad D_1 = s_0 x - s_1,$$

$$D_2 = x^2(s_0 s_2 - s_1^2) + x(s_1 s_2 - s_0 s_3) - s_2 s_3 - s_2^2, \qquad \dots.$$

Supposons que l'on ait pu calculer ainsi N_1, N_2, ... et D_1, D_2, ... ; étudions les propriétés de ces polynômes. Observons d'abord que la différence $\frac{N_{i+1}}{D_{i+1}} - \frac{N_i}{D_i}$ doit être de la forme $\frac{A}{x^{2i+1}} + \dots$, on peut poser

$$\frac{N_{i+1} D_i - D_{i+1} N_i}{D_i D_{i+1}} = \frac{A}{x^{2i+1}} + \dots,$$

A, ... désignant des coefficients constants: or $D_i D_{i+1}$ étant de l'ordre $2i+1$ en x, cette égalité ne peut subsister que si $N_{i+1} D_i - D_{i+1} N_i$ est indépendant de x; nous poserons donc

$$N_{i+1} D_i - D_{i+1} N_i = K.$$

Mais les N_i et D_i n'étant déterminés qu'à des facteurs constants près, rien ne nous empêche de supposer $K = 1$; nous aurons alors

$$(6) \qquad N_{i+1} D_i - D_{i+1} N_i = 1,$$

ce qui déterminera complètement les quantités G_i, quand on se sera donné N_1 et D_1.

Nous savons que $\frac{N_1}{D_1}$ est de la forme $\frac{A}{x}$; nous prendrons $D_1 = \frac{x}{s_0}$ et $N_1 = 1$: les quantités N_i et D_i seront alors complètement déterminées.

Cela posé, développons $\frac{N_m}{D_m}$ en fraction continue, et supposons $i < m$, en employant la méthode exposée aux paragraphes précédents. Je dis que les réduites successives seront $\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \cdots$, et, en effet, ces réduites sont pleinement déterminées par les conditions suivantes :

1° $\frac{N_i}{D_i}$ et $\frac{N_m}{D_m}$, développés suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, ont les mêmes termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots, \frac{1}{x^{2i+1}}$.

2° On a $N_{i+1}D_i - N_iD_{i+1} = 1$.

3° $N_1 = 1$, $D_1 = \frac{x}{s_0}$.

Si donc on pose

$$D_3 = D_2Q_3 - D_1, \quad \ldots, \quad D_{i+1} = D_iQ_{i+1} - D_{i-1}, \quad \ldots$$

$$Q_1 = D_1 = \frac{x}{s_0}, \quad Q_2 = N_2,$$

les quantités Q seront bien déterminées, et la fraction continue

$$\cfrac{1}{Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cfrac{1}{Q_3 - \ddots}}},$$

dont les réduites successives seront $\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \cdots$ représentera la fonction $\theta(x)$, qui d'ailleurs pourra se développer en série, sous la forme

$$(7) \qquad \theta(x) = \frac{N_1}{D_1} - \frac{1}{D_1D_2} + \frac{1}{D_2D_3} - \cdots.$$

XIII. — Développement de l'intégrale $\int_a^b \frac{F(\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha$.

Supposons la fonction $F(x)$ continue et finie quand x varie de a à b : si le module de x est suffisamment grand, on

pourra développer l'intégrale

$$(1) \qquad \theta(x) = \int_a^b \frac{F(z)\,dz}{x - z}$$

suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$ sous la forme

$$\theta(x) = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots$$

et l'on pourra la réduire en fraction continue par les méthodes exposées ci-dessus; on a d'ailleurs

$$(2) \qquad s_0 = \int_a^b F(z)\,dz, \qquad \ldots, \qquad s_i = \int_a^b z^i F(z)\,dz, \qquad \ldots.$$

Soit $\frac{N_i}{D_i}$ la $i^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue cherchée et

$$\frac{N_i}{D_i} = \frac{a_0 x^{i-1} + a_1 x^{i-2} + \ldots + a_{i-1}}{b_0 x^i + b_1 x^{i-1} + \ldots + b_i};$$

$\frac{N_i}{D_i}$ différera de $\theta(x)$ par des termes d'ordre $2i+1$ en $\frac{1}{x}$, en sorte que l'on aura

$$\frac{a_0 x^{i-1} + \ldots + a_{i-1}}{b_0 x^i + \ldots + b_i} = \frac{s_0}{x} + \ldots + \frac{s_{2i-2}}{x^{2i-1}} + \ldots;$$

les a et les b seront déterminés par les formules

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 s_0, \\ a_1 &= b_0 s_1 + b_1 s_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i-1} &= b_0 s_{i-1} + \ldots + b_{i-1} s_0; \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= b_0 s_i + b_1 s_{i-1} + \ldots + b_i s_0, \\ 0 &= b_0 s_{i+1} + b_1 s_i + \ldots + b_i s_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 &= b_0 s_{2i} + b_1 s_{2i-1} + \ldots + b_i s_{i-1}. \end{aligned} \right.$$

Occupons-nous surtout de ces dernières équations (3) : elles déterminent les coefficients b du polynôme $D_i(x)$ qui, multiplié par $\theta(x)$, fera disparaître les termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots, \frac{1}{x^{i-1}}$;

au lieu de résoudre les équations (3), comme on l'a fait au paragraphe précédent, remplaçons les s_i par leurs valeurs (2) : nous aurons

$$0 = \int_a^b F(x)\,dx\,(b_0 x^i + \ldots + b_i),$$

. . . .

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \int_a^b F(x) D_i(x)\,dx,\\ 0 &= \int_a^b F(x) D_i(x)\,x\,dx,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 0 &= \int_a^b F(x) D_i(x)\,x^{i-1}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent (p. 186) que l'on doit avoir

$$(5)\qquad F(x) D_i(x) = \frac{d^i}{dx^i}\left[(x-a)^i (x-b)^i \psi(x)\right],$$

$\psi(x)$ désignant une fonction qu'il faudra choisir de telle sorte que D_i soit un polynôme entier de degré i.

On voit que, si $F(x)$ conserve le même signe entre a et b, D_i aura ses i racines réelles et comprises entre a et b; enfin les formules (4) montrent que, pour $i \gtrless j$, on a

$$\int_a^b F(x) D_i(x) D_j(x)\,dx = 0.$$

Prenons $F(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$: la formule (1) donne

$$(3)\qquad \theta(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x - x} = \log\frac{x+1}{x-1},$$

et les équations (4) se réduisent à

$$\int_{-1}^{+1} D_i(x)\,dx = 0,$$

. . . .

$$\int_{-1}^{+1} D_i(x)\,x^{i-1}\,dx = 0;$$

les polynômes D_i sont, à des facteurs constants près, les polynômes de Legendre ; on a d'ailleurs

$$D_1 = \frac{x}{s_0}, \qquad X_1 = 1,$$

et (3) donne

$$s_0 = 2, \qquad s_1 = 0, \qquad s_2 = \frac{2}{3}, \qquad s_3 = 0, \qquad s_4 = \frac{2}{5}, \qquad \ldots.$$

Nous allons prouver que, si l'on prend $F(x) = \frac{1}{2}$, les polynômes D seront précisément les X_n de Legendre, ce qui fournira l'expression des X_n sous forme de déterminants. Nous partirons à cet effet de la formule

$$X_0 Z_0 + 3 X_1 Z_1 + \ldots + (2n+1) X_n Z_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n);$$

en intégrant alors de -1 à $+1$, nous aurons

$$2 = (n+1) X_n \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1}}{z-x}\, dz - (n+1) X_{n+1} \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n}{z-x}\, dz$$

ou, en divisant par $X_n X_{n+1}(n+1)$,

$$\frac{2}{(n+1) X_n X_{n+1}} = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} - \frac{Z_n}{X_n} \right) \frac{dz}{z-x}.$$

Faisons dans cette équation $n = 0, 1, 2, \ldots, n$ et ajoutons toutes les équations ainsi obtenues ; nous aurons

$$\frac{2}{X_0 X_1} + \frac{2}{2 X_1 X_2} + \ldots + \frac{2}{(n+1) X_n X_{n+1}} = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} - 1 \right) \frac{dz}{z-x}.$$

Si l'on fait $n = \infty$, $\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}}$ tendra vers zéro : si comme on doit le supposer, mod. $x > 1$ et si $z < 1$ en valeur absolue, et l'on aura

$$\frac{1}{X_0 X_1} + \frac{1}{2 X_1 X_2} + \frac{1}{3 X_2 X_3} + \ldots = \log \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

formule équivalente à

$$\log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{\frac{x}{1} - \cfrac{1}{\frac{5x}{4} - \cfrac{1}{\frac{2\cdot7}{3}x \ldots}}}}$$

Si nous prenons $F(x) = 1 : \sqrt{1-x^2}$, nous aurons

$$\theta(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\,(x-\alpha)} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{+1} D_i \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} D_i \frac{\alpha^{i-1}\,d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 0, \end{array}\right.$$

et il est facile de voir que le polynôme D_i est précisément le polynôme $\cos i \arccos x$. Pour s'en convaincre, il suffit de faire $\alpha = \cos\gamma$ et l'on a, au lieu des équations (4),

$$\int_0^\pi D_i(\cos\gamma)\,d\gamma = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_0^\pi D_i(\cos\gamma)\cos^{i-1}\gamma\,d\gamma = 0,$$

c'est-à-dire, en général,

$$\int_0^\pi D_i(\cos\gamma)\cos m\gamma\,d\gamma = 0, \qquad m < i,$$

équations satisfaites pour $D_i(\cos\gamma) = \cos i\gamma$. Ainsi les polynômes D_i sont, à des facteurs constants près, les polynômes $\cos i \arccos x$.

Considérons la fraction continue

$$y = \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \ldots}}};$$

sa valeur est donnée par la formule

$$y = \frac{1}{2x - y}$$

ou

$$y^2 - 2xy + 1 = 0;$$

d'où l'on tire

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{x \pm \sqrt{x^2 - 1}} = 2x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \ldots}}$$

ou

$$x \mp \sqrt{x^2 - 1} = 2x - \frac{1}{2x - \ldots}.$$

On en conclut

$$\pm \sqrt{x^2 - 1} = x - \frac{1}{2x - \ldots}$$

et, par suite,

$$\frac{\pm 1}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \ldots}},$$

et il est clair que c'est le signe + qu'il faut prendre. Si l'on forme les dénominateurs des réduites, on trouve

$$Q_1 = 2x, \qquad Q_0 = 2,$$
$$Q_{n+1} = Q_n 2x - Q_{n-1};$$

formules satisfaites pour $x = \cos\gamma$, $Q_n = 2\cos n\gamma$.

XIV. — Développement en fraction continue d'une série ordonnée suivant les puissances de x.

Considérons la fonction $f(x)$ définie par la fraction continue suivante, où $a_0, a_1, \ldots$ sont indépendants de x,

$$f(x) = a_0 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \ldots}}}, \tag{1}$$

et, sans nous préoccuper, pour le moment, des conditions de convergence de cette fraction, désignons par $\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{x}{a_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}, \ldots$ les réduites successives. Nous aurons (p. 322)

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 a_1 + x, \\ P_2 &= a_0 a_1 a_2 + x(a_0 + a_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ Q_1 &= a_1, \\ Q_2 &= a_1 a_2 + x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

$$P_{n+1} = P_n a_{n+1} + P_{n-1} x, \tag{2}$$

$$Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} x, \tag{3}$$

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (-1)^n x^{n+1} \tag{4}$$

et, approximativement (p. 323).

$$f(x) = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a_0 + \frac{x}{Q_1} - \frac{x^2}{Q_1 Q_2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}. \tag{5}$$

Les polynômes P_{2n}, P_{2n+1}, Q_{2n}, Q_{2n+1} sont de degré n, comme il est facile de s'en convaincre à l'inspection des formules (2) et (3), en observant que P_1 et P_2 sont de degré 1 et que Q_1 et Q_2 sont respectivement de degrés 0 et 1.

Observons enfin que

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}},$$

et que par conséquent la réduite de rang n donne une valeur approchée de la fraction continue qui dépend des termes d'ordre $n+1$.

Cela posé, considérons une fonction $f(x)$, développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x,

$$f(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_n x^n + \ldots; \tag{6}$$

si une pareille fonction est développable en une fraction continue, telle que (1), il faudra que l'on ait

$$\frac{P_n}{Q_n} = s_0 + s_1 x + \ldots + s_n x^n + \omega,$$

ω désignant un terme d'ordre $n+1$ en x. Les considérations précédentes ne sont peut-être pas d'une rigueur excessive, mais elles sont amplement suffisantes pour montrer comment on est tout naturellement conduit à l'analyse que nous allons maintenant développer.

Supposons que la formule (6) ait lieu à l'intérieur d'un cercle de convergence de rayon R. Posons

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n}{\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n} = s_0 + s_1 x + \ldots + s_{2n} x^{2n} + \omega,$$

ω désignant des termes de degré supérieur à $2n$. Nous aurons

$$\begin{aligned} &d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n \\ &\quad = (s_0 + s_1 x + \ldots + \omega)(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n), \end{aligned}$$

et nous satisferons à cette égalité en prenant

$$\begin{aligned} d_0 &= s_0 \beta_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ d_n &= s_0 \beta_n + s_1 \beta_{n-1} + \ldots + s_n \beta_0, \\ 0 &= s_1 \beta_n + s_2 \beta_{n-1} + \ldots + s_{n+1} \beta_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= s_n \beta_n + s_{n+1} \beta_{n-1} + \ldots + s_{2n} \beta_0. \end{aligned}$$

Les n dernières équations déterminent les rapports

$$\beta_0 : \beta_1 : \ldots : \beta_n,$$

et, comme

$$Q_{2n} = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \beta_0,$$

on en conclut que, en appelant U_{2n} un polynôme qui ne diffère de Q_{2n} que par un facteur constant, on a

$$(7) \qquad U_{2n} = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \ldots & x & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & \ldots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \ldots & \ldots & s_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & \ldots & s_{2n+1} \end{vmatrix},$$

en posant de même

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{d_0 + d_1 x + \ldots + d_{n+1} x^{n+1}}{\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n}$$
$$= s_0 + s_1 x + \ldots + s_{2n+1} x^{2n+1} + \omega,$$

et, en procédant comme tout à l'heure, on est conduit à poser

$$(8) \qquad U_{2n+1} = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \ldots & 1 \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+2} \\ s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n+1} \end{vmatrix}$$

ou encore

$$(9) \qquad U_{2n+1} = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \ldots & 1 & 0 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} & 1 \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n+1} & 0 \end{vmatrix},$$

nous ferons encore

$$S_{p+2q}^{p} = \begin{vmatrix} s_p & s_{p+1} & \ldots & s_{p+q} \\ s_{p+1} & s_{p+2} & \ldots & s_{p+q+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p+q} & s_{p+q+1} & \ldots & s_{p+2q} \end{vmatrix}.$$

Rappelons-nous maintenant que, si l'on a

$$R = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn},$$

on a l'identité (p. 161, t. I)

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ij}\,\partial a_{kl}} = \frac{\partial R}{\partial a_{ij}}\,\frac{\partial R}{\partial a_{kl}} - \frac{\partial R}{\partial a_{il}}\,\frac{\partial R}{\partial a_{kj}},$$

et, en appliquant cette formule aux déterminants U_{2n} et U_{2n+1}, on a

$$\begin{aligned} U_{2n}\;\;S^2_{2n-2} &= x\,U_{2n-2}\,S^2_{2n} \;\;- U_{2n-1}\,S^1_{2n-1},\\ U_{2n+1}\,S^1_{2n-1} &= x\,U_{2n-1}\,S^1_{2n+1} - U_{2n}\;\;S^2_{2n}. \end{aligned}$$

Si l'on pose alors

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} Q_{2n} &= \frac{U_{2n}}{S^2_{2n}}, & Q_{2n+1} &= \frac{U_{2n+1}}{S^1_{2n+1}},\\ a_{2n} &= \frac{S^1_{2n-1}}{S^2_{2n-2}\,S^2_{2n}}, & a_{2n+1} &= \frac{S^2_{2n}}{S^1_{2n-1}\,S^1_{2n+1}}, \end{aligned}\right.$$

ces formules se transforment dans les suivantes

$$\begin{aligned} Q_{2n} \;\;&= x\,Q_{2n-2} - a_{2n}\;\;Q_{2n-1},\\ Q_{2n+1} &= x\,Q_{2n-1} - a_{2n+1}\,Q_{2n}, \end{aligned}$$

qui peuvent être remplacées par la formule unique

$$Q_{n+1} = x\,Q_{n-1} + a_{n+1}\,Q_n;$$

Q_1, Q_2, ... sont alors les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$a_0 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \ldots}}}$$

Je dis que les polynômes P_n sont les numérateurs des mêmes réduites. En effet, appelons un instant P'_1, P'_2, ..., P'_n, ... ces numérateurs; on sait que

$$\frac{P'_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P'_n}{Q_n} = (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{Q_n\,Q_{n+1}},$$

ou que

$$(11)\qquad P'_{n+1}\,Q_n - P'_n\,Q_{n+1} = (-1)^n x^{n+1};$$

d'un autre côté,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \omega,$$

ω étant un terme d'ordre $n+1$ en x et, par suite,

$$P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n$$

est aussi d'ordre $n+1$; cette quantité ne peut donc être que de la forme γx^{n+1}, γ étant une constante. Or on sait que les formules (11) déterminent les polynômes P à un facteur constant près ; donc les P sont égaux aux P′, à un facteur constant près (le même pour P_1 et P'_1 pour P_2 et P'_2, ...) ; or on constate directement que $P_1 = P'_1$; donc :

Les a_n étant déterminés par les formules (11), *la série* (6) *peut être remplacée par la fraction continue* (1).

XV. — Formule de Gauss.

Posons avec Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots$$

Il est facile de voir que le cercle de convergence de cette série est 1 et que, par suite, la fonction F est bien déterminée pour les valeurs du module de x moindres que un, quand α, β, γ sont quelconques. Cette série peut se convertir en fraction continue comme il suit.

Il est facile de constater que l'on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ &\quad = x\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x); \end{aligned}\right.$$

il suffit pour cela de remplacer les fonctions F par leurs développements. Posons

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

divisons (1) par $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$; elle deviendra

$$1-\frac{1}{\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)}=x\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\,\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}$$

ou, en observant que la fonction F ne change pas quand on change α en β et *vice versa*,

$$1-\frac{1}{\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)}=\alpha x\frac{\gamma-\beta}{\gamma(\gamma+1)}\,\frac{F(\beta+1, \alpha+1, \gamma+2, x)}{F(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)},$$

c'est-à-dire

$$1-\frac{1}{\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)}=x\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\,\Phi(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)$$

ou

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)=\frac{1}{1-x\dfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\,\Phi(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)};$$

d'où, changeant α en $\beta+1$, β en α, γ en $\gamma+1$,

$$\Phi(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)=\frac{1}{1-x\dfrac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\,\Phi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)};$$

on tire de là

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x)=\frac{1}{1-\dfrac{\left[\dfrac{x\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\right]}{1-\dfrac{x(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\,\Phi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}}.$$

Cette formule donne le développement de Φ en fraction continue; en faisant $\beta=0$, on a

$$F(\alpha, 0, \gamma, x)=1$$

et

$$\Phi(\alpha, 0, \gamma, x)=F(\alpha, 1, \gamma+1, x),$$

et l'on trouve, en changeant γ en $\gamma - 1$,

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 \ldots}}}}$$

où l'on a posé

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad b = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma + 1)},$$

$$c = \frac{(\alpha + 1)\gamma}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}, \qquad d = \frac{2(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)},$$

$$e = \frac{(\alpha + 2)(\gamma + 1)}{(\gamma + 3)(\gamma + 4)}, \qquad f = \frac{3(\gamma + 2 - \alpha)}{(\gamma + 4)(\gamma + 5)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

XVI. — Digression sur les nombres π et e.

Nous avons vu que les transcendantes de Bessel se réduisaient, dans des cas particuliers, à des facteurs près, aux intégrales successives

$$\sin x, \quad \int_0^x x \sin x \, dx, \quad \int_0^x x \int_0^x x \sin x \, dx^2, \quad \ldots.$$

Posons

$$U_0 = \sin x, \qquad U_1 = \int_0^x x \sin x \, dx = \int_0^x x U_0 \, dx, \qquad \ldots.$$

$$U_{n+1} = \int_0^x x U_n \, dx;$$

on aura, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} U_0 &= \sin x, \\ U_1 &= -x \cos x + \sin x, \\ U_2 &= 3 U_1 - x^2 U_0, \\ U_3 &= 5 U_2 - x^2 U_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et l'on soupçonne la formule générale

$$(1)\qquad U_{n+1} = (2n+1)U_n - x^2 U_{n-1},$$

que l'on vérifie en prouvant qu'elle a encore lieu quand on change n en $n+1$. A cet effet, multiplions (1) par x et intégrons de o à x; nous aurons

$$(2)\qquad U_{n+2} = (2n+1)U_{n+1} - \int_0^x x^3 U_{n-1}\,dx.$$

Or

$$\int_0^x x^3 U_{n-1}\,dx = \left[\left(\int_0^x x\,U_{n-1}\,dx\right)x^2\right]_0^x - \int_0^x 2x\,dx\left(\int_0^x x\,U_{n-1}\,dx\right)$$

ou

$$\int_0^x x^3 U_{n-1}\,dx = x^2 U_n - 2\int_0^x x\,U_n\,dx = x^2 U_n - 2U_{n+1}.$$

La formule (2) s'écrit alors

$$U_{n+2} = (2n+3)U_{n+1} - x^2 U_n.$$

La formule (1) est ainsi établie.

Ceci posé, il est évident que U_n est de la forme

$$U_n = C_n \cos x + S_n \sin x,$$

C_n et S_n désignant des polynômes entiers en x, et la formule (1) peut s'écrire

$$C_{n+1}\cos x + S_{n+1}\sin x = (2n+1)(C_n\cos x + S_n \sin x) - x^2(C_{n-1}\cos x + S_{n-1}\sin x).$$

Les coefficients de $\cos x$ et $\sin x$ dans les deux membres de cette équation doivent être égaux; en effet, quand on a

$$A\cos x + B\sin x = A'\cos x + B'\sin x,$$

on en conclut

$$A + B\tan x = A' + B'\tan x$$

ou

$$A - A' = (B' - B)\tan x.$$

Cette égalité est impossible si A, A', B, B' sont des polynômes, tels que $B \gtrless B'$; car le second membre est infini pour $x = \frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, ... qui ne peuvent pas tous annuler $B' - B$. Ainsi l'on doit avoir

$$C_{n+1} = (2n+1)C_n - x^2 C_{n-1},$$
$$S_{n+1} = (2n+1)S_n - x^2 S_{n-1};$$

on en conclut, en faisant $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ et en observant que, comme $U_0 = \sin x$, $U_1 = -x\cos x + \sin x$,

$$C_1 = -x^2 C_{-1}, \qquad S_1 = 1 - x^2 S_{-1},$$
$$C_2 = 3C_1 - x^2 C_0, \qquad S_2 = 3S_1 - x^2 S_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces formules permettront de calculer C_0, C_1, ... de proche en proche, et l'on voit que

$$C_{-1} = \frac{1}{x}, \qquad S_{-1} = 0, \qquad U_{-1} = \frac{\cos x}{x}.$$

Or on a

$$U_{n+1} = U_n(2n+1) - x^2 U_{n-1}$$

ou

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{2n+1}{x^2} - \frac{1}{U_n x^2 : U_{n+1}};$$

donc

$$\frac{U_{-1}}{U_0} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{U_0 x^2 : U_1}$$
$$= \frac{1}{x^2} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x^2} - \cfrac{1}{U_1 x^2 : U_2}} = \ldots.$$

Or $\frac{U_{-1}}{U_0} = \frac{\cos x}{x} : \sin x = \frac{\cot x}{x}$; on a donc

$$\frac{\cot x}{x} = \frac{1}{x^2} - \cfrac{1}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7}}}$$

ou

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ddots}}}$$

ou enfin

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

Cette équation prouve que, si x est commensurable, $\tan x$ ne saurait l'être; donc, si $\frac{\pi}{4}$ était commensurable, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ ne saurait l'être, ce qui est absurde; le nombre π est donc incommensurable.

Si l'on fait $x = x'\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{e^{x'} - e^{-x'}}{e^{x'} + e^{-x'}} = \cfrac{x'}{1 + \cfrac{x'^2}{3 + \cfrac{x'^2}{5 + \ddots}}},$$

ce qui prouve de même que e^x est incommensurable, quand x est commensurable.

On a aussi

$$\frac{\tan x}{x} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ddots}}};$$

donc, si x^2 est commensurable, $\frac{\tan x}{x}$ ne le sera pas. Faisons $x = \pi$, on aura

$$0 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \ddots}}};$$

donc

$$3 = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}};$$

donc π^2 pas plus que π ne peut être commensurable (1). (HERMITE, *Comptes rendus*, 1873.)

XVII. — Développement des irrationnelles algébriques et des racines de l'équation du second degré en particulier.

Soient $F(x) = 0$ une équation algébrique, a une valeur entière approchée par défaut d'une racine : si l'on fait $x = a + \frac{1}{x_1}$, l'équation $F(x) = 0$ se transforme en une autre $F_1(x_1) = 0$. Soit a_1 une valeur approchée par défaut et entière d'une racine de cette équation : on pourra poser $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ et ainsi de suite ; on obtiendra ainsi le développement suivant pour une racine

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

Cette méthode pour la résolution des équations a été développée par Lagrange ; elle conduit, pour les équations du deuxième degré, à une conséquence remarquable.

Soit

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{1}$$

une équation du second degré à coefficients entiers, et sup-

(1) Depuis que ces lignes ont été écrites, MM. Hermite et Lindemann sont parvenus à démontrer que les nombres π et e ne sauraient être racines d'une équation algébrique à coefficients entiers. M. Rouché a reproduit leur démonstration à la fin de la dernière édition de sa Géométrie.

posons qu'en appliquant la méthode de Lagrange on ait trouvé

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 \ldots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}},$$

pour le développement d'une racine; a, a_1 ... sont alors des entiers positifs (excepté peut-être a).

Appelons $\frac{P_1}{Q_1} \cdots \frac{P_n}{Q_n}$ les réduites successives de la fraction continue, abstraction faite du terme x_{n+1}, on aura

$$x = \frac{P_n + P_{n-1} x_{n+1}}{Q_n + Q_{n-1} x_{n+1}};$$

portant cette valeur dans l'équation (1), on aura

$$\alpha' x_{n+1}^2 + \beta' x_{n+1} + \gamma' = 0, \tag{2}$$

formule où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha P_{n-1}^2 + \beta P_{n-1} Q_{n-1} + \gamma Q_{n-1}^2, \\
\beta' &= 2\alpha P_n P_{n-1} + \beta(P_{n-1} Q_n + Q_{n-1} P_n) + 2\gamma Q_n Q_{n-1}, \\
\gamma' &= \alpha P_n^2 + \beta P_n Q_n + \gamma Q_n^2.
\end{aligned}$$

Or considérons la valeur de α'; on peut l'écrire

$$\alpha' = Q_{n-1}^2 \left(\alpha \frac{P_{n-1}^2}{Q_{n-1}^2} + \beta \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \gamma \right),$$

et, en posant

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = x + \varepsilon$$

et en tenant compte de (1),

$$\alpha' = Q_{n-1}^2 (2\alpha\varepsilon x + \beta\varepsilon + \alpha\varepsilon^2);$$

mais ε est moindre que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$ ou que $\frac{1}{Q_{n-1}^2}$; donc

$$\alpha' < 2\alpha x + \beta + \frac{\alpha}{Q_{n-1}^2},$$

en supposant $\alpha > 0$, ce qui est permis. Il en résulte que α' ne croît pas indéfiniment avec n; on verrait d'une façon analogue que β' et γ' ne croissent pas non plus indéfiniment. Comme ces nombres α', β', γ' sont entiers, ils finiront par se reproduire, et il y aura une inconnue auxiliaire x_n qui finira par être égale à l'une des inconnues auxiliaires précédentes; le développement des racines de l'équation (1) finira par être *périodique;* on a donc ce théorème de Lagrange :

Toute racine d'une équation du second degré à coefficients entiers se développe en fraction continue périodique, dont les numérateurs sont égaux à un et les dénominateurs entiers.

La démonstration précédente est de M. Charves.

Réciproquement, *toute fraction continue périodique est racine d'une équation du second degré, qu'il est facile de former.*

En effet, soit

$$y = \cfrac{u'}{u + \ddots + \cfrac{u'}{u + \cfrac{v'}{v + \ddots + \cfrac{u'}{u + \ddots}}}}$$

La période se composant des dénominateurs u, v, ..., w, on a

$$y = \cfrac{u'}{u + \ddots + y} = \frac{p + p'y}{q + q'y},$$

p, p', q, q' désignant des quantités indépendantes de y; on voit, en chassant le dénominateur, que y est racine de l'équation

$$q'y^2 + y(q - p') - p = 0.$$

CHAPITRE VIII.

CALCUL DES VARIATIONS DES INTÉGRALES SIMPLES.

I. — Théorème fondamental.

On peut toujours trouver une fonction

$$\chi(t_1, t_2, \ldots, t_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *et des paramètres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *qui, pour* $t_1 = t_1^0$, $t_2 = t_2^0$, $\ldots$, $t_n = t_n^0$, *se réduise à une fonction donnée* $\varphi^0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ *des* α, *qui pour* $t_1 = t_1'$, $t_2 = t_2'$, $\ldots$, $t_n = t_n'$ *se réduise à une autre fonction donnée* $\varphi'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, *qui pour* $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_2 = \alpha_2^0$, $\ldots$, *se réduise à une fonction donnée* $\theta^0(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *des* t *et qui pour* $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$, $\ldots$, *se réduise à une autre fonction donnée* $\theta'(t_1, t_2, \ldots)$ *des* t.

En supposant, bien entendu,

$$\chi(t_1^0, t_2^0, \ldots, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots) = \varphi^0(\alpha_1^0, \ldots) = \theta^0(t_1^0, \ldots) = \Theta_{00},$$
$$\chi(t_1', t_2', \ldots, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots) = \varphi'(\alpha_1^0, \ldots) = \theta^0(t_1', \ldots) = \Theta_{10},$$
$$\chi(t_1^0, t_2^0, \ldots, \alpha_1', \alpha_2', \ldots) = \varphi^0(\alpha_1', \ldots) = \theta'(t_1^0, \ldots) = \Theta_{01},$$
$$\chi(t_1', t_2', \ldots, \alpha_1', \alpha_2', \ldots) = \varphi'(\alpha_1', \ldots) = \theta'(t_1', \ldots) = \Theta_{11},$$

ce théorème est presque évident, et la fonction dont il est question peut revêtir une infinité de formes diverses. Bornons-nous à en signaler une seule : posons

$$T_0 = \frac{(t_1 - t_1^0)(t_2 - t_2^0)\ldots(t_n - t_n^0)}{(t_1' - t_1^0)(t_2' - t_2^0)\ldots(t_n' - t_n^0)},$$
$$T_1 = \frac{(t_1 - t_1')(t_2 - t_2')\ldots(t_n - t_n')}{(t_1^0 - t_1')(t_2^0 - t_2')\ldots(t_n^0 - t_n')},$$
$$A_0 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_1^0)(\alpha_2 - \alpha_2^0)\ldots(\alpha_m - \alpha_m^0)}{(\alpha_1' - \alpha_1^0)(\alpha_2' - \alpha_2^0)\ldots(\alpha_m' - \alpha_m^0)},$$
$$A_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_1')(\alpha_2 - \alpha_2')\ldots(\alpha_m - \alpha_m')}{(\alpha_1^0 - \alpha_1')(\alpha_2^0 - \alpha_2')\ldots(\alpha_m^0 - \alpha_m')};$$

nous pourrons prendre

$$\begin{aligned}\chi = \mathrm{T}_1(\varphi^0 - \Theta_{00}\mathrm{A}_0 - \Theta_{01}\mathrm{A}_1) \\ - \mathrm{T}_0(\varphi' - \Theta_{10}\mathrm{A}_0 - \Theta_{11}\mathrm{A}_1) + \mathrm{A}_1\theta^0 - \mathrm{A}_0\theta'.\end{aligned}$$

comme il est facile de le vérifier en faisant $t_1 = t_1^0, \ldots$ ou $t_1 = t_1', \ldots$ ou $\alpha_1 = \alpha_1^0, \ldots$ ou $\alpha_1 = \alpha_1', \ldots$.

II. — Variation d'une fonction.

Dans un grand nombre de questions, on a besoin de comparer deux fonctions et de passer de l'une à l'autre d'une manière continue : ce passage peut se faire en imaginant que les deux fonctions en question sont des cas particuliers d'une fonction plus générale, contenant des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, tels qu'en y faisant $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_2 = \alpha_2^0$, ..., on obtienne la première fonction et qu'en y faisant $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$, ... on obtienne la seconde. En appelant f_0 la première fonction, f_1 la seconde, la fonction plus générale en question pourra, par exemple, affecter la forme

$$f_1 \frac{(\alpha_1 - \alpha_1^0)(\alpha_2 - \alpha_2^0)\ldots}{(\alpha_1' - \alpha_1^0)(\alpha_2' - \alpha_2^0)\ldots} + f_0 \frac{(\alpha_1 - \alpha_1')(\alpha_2 - \alpha_2')\ldots}{(\alpha_1^0 - \alpha_1')(\alpha_2^0 - \alpha_2')\ldots}.$$

Toute différentielle relative aux paramètres α s'appellera une *variation* et sera représentée par la caractéristique δ que nous substituerons à la caractéristique d.

III. — Variation d'une intégrale.

Lorsque l'on veut étudier les changements que subit une intégrale quand on modifie la fonction placée sous le signe $\int$, ainsi que les limites, on peut imaginer que ces changements s'opèrent au moyen de la variation d'un ou de plusieurs paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ contenus dans la fonction à intégrer et

dans les limites; mais, au moyen d'un artifice que nous allons indiquer, on peut se dispenser de faire varier les limites, ce qui évite souvent des complications.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots)\,dx,$$

dans laquelle F est une fonction quelconque de $x, y, y', \ldots$ $z, z', \ldots$ de forme donnée; $y, z, \ldots$ des fonctions de forme indéterminée de x; et $y', z', y'', z'', \ldots$ leurs dérivées relatives à x. On peut, si on le juge à propos, faire varier y, z, x_0, x_1, les valeurs y_0, y_1 de y pour $x = x_0$ et $x = x_1, \ldots$ les valeurs $z = z_0$, $z = z_1$ de z pour $x = x_0$, $x = x_1, \ldots$. Alors on imagine un changement de variable : on pose

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \\ y &= \chi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \\ z &= \psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et l'on prend pour nouvelle variable d'intégration t. On détermine ensuite la forme des fonctions $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ de telle sorte que, pour $t = t_0$, x se réduise à x_0, y à y_0, z à $z_0, \ldots$; que, pour $t = t_1$, x se réduise à x_1, y à y_1, z à z_1; que, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_2 = \alpha_2^0$, $\ldots$ x, y, z se réduisent à des fonctions données de t, à savoir $\Phi_0(t)$, $\mathrm{X}_0(t)$, $\Psi_0(t), \ldots$; que, pour $\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots, x, y, z$ se réduisent à $\Phi_1(t)$, $\mathrm{X}_1(t)$, $\Psi_1(t)$. Ces fonctions $\Phi_0, \mathrm{X}_0, \Psi_0, \ldots; \Phi_1, \mathrm{X}_1, \Psi_1, \ldots$ peuvent d'ailleurs être choisies de telle sorte que, par l'élimination de t, y et z, $\ldots$ deviennent des fonctions données de x pour $\alpha_1 = \alpha_1^0, \ldots$ et pour $\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots$.

Les limites de l'intégrale ne contiennent pas les α après ce changement de variables, et alors la variation de l'intégrale, ou sa différentielle totale relative aux α pourra se prendre simplement en différentiant sous le signe $\int$. Nous allons maintenant développer le calcul de δu.

IV. — Première méthode.

De l'équation

$$u = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots) dx,$$

on tire, en observant que x_0 et x_1, après le changement de variable, doivent être remplacés par t_0 et t_1 et que dx doit être remplacé par $\frac{dx}{dt} dt$, mais en n'effectuant pas ce changement que l'on sous-entend

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} (\delta F \, dx + F \delta \, dx);$$

or, en observant que $\delta \, dx = \delta \frac{dx}{dt} dt = \frac{d}{dt} \delta x \, dt = d \, \delta x$ et en intégrant par parties, on a

$$\delta u = \Big|_{x_0}^{x_1} F \delta x + \int_{x_0}^{x_1} (\delta F \, dx - dF \, \delta x);$$

or, en appelant X, Y, Y', ..., Z, Z', ... les dérivées partielles de F relatives à $x, y, y', \ldots, z, z', \ldots$, on a

$$\delta u = \Big|_{x_0}^{x_1} F \delta x + \int_{x_0}^{x_1} [(\delta y \, dx - \delta x \, dy) Y + (\delta z \, dx - \delta x \, dz) Z$$
$$+ (\delta y' \, dx - \delta x \, dy') Y' + \ldots];$$

la fonction F pourrait contenir $x_0, y_0, z_0, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots$; dans ce cas, il faudrait ajouter sous le signe $\int$ les termes

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \delta x_0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y_0, \quad \ldots,$$

que nous n'écrivons pas pour ne pas trop compliquer. On

peut encore écrire l'expression précédente ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \delta u = &\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\,\delta x \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} dx[(\delta y - y'\delta x)\mathrm{Y} + (\delta z - z'\delta x)\mathrm{Z} + \ldots + (\delta y' - y''\delta x)\mathrm{Y}' \\ &\qquad + (\delta z' - z''\delta x)\mathrm{Z}' + \ldots + (\delta y'' - y'''\delta x)\mathrm{Y}'' + \ldots] \end{aligned}\right.$$

Si nous posons alors

$$\omega = \delta y - y'\delta x, \qquad \varpi = \delta z - z'\delta x, \qquad \ldots$$

nous aurons, en différentiant par rapport à t,

$$d\omega = \delta\, dy - y'\delta\, dx - dy'\delta x$$

ou, en observant que $\delta\, dy = \delta(y'\,dx) = \delta y'\,dx + y'\delta\, dx$,

$$d\omega = \delta y'\,dx - dy'\delta x = dx(\delta y' - y''\delta x)$$

ou bien

$$(2)\qquad \omega' = \delta y' - y''\delta x.$$

Différentiant encore, on a

$$d\omega' = \delta y''\,dx + y''\delta\, dx - y'''\,dx\,\delta x - y''\,d\delta x$$

ou

$$d\omega' = dx(\delta y'' - y'''\delta x),$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'' &= \delta y'' - y'''\delta x, \\ \omega''' &= \delta y''' - y^{\text{IV}}\delta x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

(2) et (3) permettent d'écrire (1) comme il suit

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\,\delta x + \int_{x_0}^{x_1} dx[\omega\mathrm{Y} + \varpi\mathrm{Z} + \ldots + \omega'\mathrm{Y}' + \varpi'\mathrm{Z}' + \ldots + \omega''\mathrm{Y}'' + \varpi''\mathrm{Z}'' + \ldots]$$

ou, en intégrant par parties.

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \left(F\,\delta x - \omega Y' - \varpi Z' - \ldots - \omega' Y'' - \varpi' Z'' + \ldots - \omega \frac{dY''}{dx} + \ldots \right)$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} dx \left[\omega \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \ldots \right) + \varpi \left(Z - \frac{dZ'}{dx} + \ldots \right) \right].$$

Telle est l'expression de la variation de u; elle est de la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} H + \int_{x_0}^{x_1} (\Omega\omega + \Pi\varpi)\,dx,$$

Ω et Π ne contenant plus une seule variation.

V. — Seconde méthode.

On peut suivre une méthode plus simple pour calculer δu. Considérons toujours l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \ldots)\,dx,$$

et faisons encore le changement de variable indiqué au paragraphe précédent; mais remplaçons y' par $\frac{dy}{dx}$, y'' par $\frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}$, ..., c'est-à-dire substituons partout aux dérivées prises par rapport à x les différentielles prises par rapport à t; u prend alors la forme

$$u = \int F(x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, \ldots).$$

Si l'on pose alors

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \qquad \frac{\partial F}{\partial\, dx} = X', \qquad \frac{\partial F}{\partial\, dy} = Y', \qquad \ldots,$$

on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta u = \int \delta F = \int (X\,\delta x &+ Y\,\delta y + Z\,\delta z + X'\,\delta\, dx \\ &+ Y'\,\delta\, dy + Z'\,\delta\, dz + X''\,\delta\, d^2x + \ldots). \end{aligned} \right.$$

En intégrant par parties les termes, tels que $X'\delta\,dx$, ..., on a

$$\int X'\delta\,dx = \int X'\,d\,\delta x = \Big|_{x_0}^{x_1} X'\delta x - \int \delta x\,dX',$$

$$\int X''\delta\,d^2x = \int X''\,d^2\delta x = \Big|_{x_0}^{x_1} X''\delta\,dx - \int dX''\delta\,dx,$$

$$= \Big|_{x_0}^{x_1} (X''\delta\,dx - dX''\delta x) + \int d^2X''\delta x,$$

....;

la formule (1) devient alors

$$(2)\quad \begin{cases} \delta u = \Big|_{x_0}^{x_0} (X'\delta x + Y'\delta y + \ldots + X''\delta\,dx\ \ldots) \\ \quad + \int (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z - dX'\delta x - dY'\delta y - dZ'\delta z + d^2X''\delta x + \ldots), \end{cases}$$

et prend la forme

$$\delta u = \Big|_{x_0}^{x_1} \Delta + \int (A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z),$$

A, B, C désignant des fonctions de x, y, z et de leurs différentielles. $\Big|_{x_0}^{x_1}\Delta$ contient les variations de x, y, ..., dx, dy, ..., aux limites x_0 et x_1.

VI. — Troisième méthode.

Pour trouver la variation d'une intégrale définie, on peut enfin suivre une troisième méthode qui s'applique assez bien aux intégrales multiples, et sur laquelle nous aurons à revenir. On suppose que les fonctions y, z, ..., dont il a été question aux paragraphes précédents, renferment des paramètres α_1, α_2, ..., entrant dans les limites x_0, x_1 de l'intégrale que l'on

veut faire varier, à savoir

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\, dx.$$

Sa variation δu ou sa différentielle totale relative aux α sera, en appliquant la règle de la différentiation sous le signe $\int$ pour le cas où les limites sont variables,

$$\delta u = \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\,\delta x - \int_{x_0}^{x_1} dx\,\delta \mathrm{F}$$

ou, en observant que x ne varie pas,

$$\delta u = \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\,\delta x + \int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Y}'\delta y' + \ldots) dx;$$

l'intégration par parties donne

$$\delta u = \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\,\delta x + \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{Y}'\delta y + \Big|_{x_0}^{x_1} \mathrm{Y}''\delta y' - \Big|_{x_0}^{x_1} \frac{d\mathrm{Y}''}{dx}\delta y + \ldots$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(\mathrm{Y} - \frac{d\mathrm{Y}'}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Y}''}{dx^2} - \ldots\right) dx\,\delta y;$$

mais δy, $\delta y'$, $\delta y''$, ... n'ont pas ici la même signification que dans notre première méthode. Ainsi l'on n'a pas $\Big|^{x_0} \delta y' = \delta y'_0$, et il est bon de savoir transformer les expressions définies qui entrent dans la formule précédente. $\Big|^{x_0} \delta y$ est égal à la valeur que prend δy pour $x = x_0$, de sorte que, si $y = f(x, \alpha)$,

$$\Big|^{x_0} \delta y = \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Au contraire,

$$\delta y_0 = \frac{d}{d\alpha}[f(x_0, \alpha)]\, d\alpha = \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\alpha;$$

il faudra donc faire usage des formules

$$\delta y_0 = \int^{x_0} \delta \ + \int^{x_0} y' \delta x,$$

la notation $\int^{x_0} y' \delta x$ étant mise ici pour $y'_0 \delta x_0$; de même

$$\delta y'_0 = \int^{x_0} \delta y' + \int^{x_0} y'' \delta x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

d'où l'on tire

$$\int^{x_0} \delta y = \delta y_0 - y'_0 \delta x_0,$$

$$\int^{x_0} \delta y' = \delta y'_0 - y''_0 \delta x_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

en ayant égard à ces formules et, par suite, aux suivantes

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta y = \delta y_1 - \delta y_0 - y'_1 \delta x_1 + y'_0 \delta x_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

il est facile de voir que la méthode actuelle fournit les mêmes résultats que la première.

VII. — Simplification.

Lorsqu'une intégrale doit subir des changements par suite des changements de forme que prennent les fonctions placées sous le signe $\int$, les limites restant invariables, on peut, ce que nous avons eu l'occasion de faire déjà plusieurs fois, supposer que les fonctions en question contiennent des paramètres variables et supposer que les variations de l'intégrale proviennent des variations attribuées à ces paramètres;

dans ce cas, il n'est pas nécessaire de faire de changement de variable, et de supposer que la variable x, par rapport à laquelle on intègre, contient les paramètres, et l'on a $\delta x = 0$. Alors on a simplement

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta F\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} (Y\,\delta y + Y'\,\delta y' + Y''\,\delta y'' + \ldots + Z\,\delta z\ldots)\,dx$$

et, en intégrant par parties,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \Big|_{x_0}^{x_1} \left(Y'\,\delta y + Y''\,\delta y' - \frac{dY''}{dx}\,\delta y' - \ldots\right)$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(Y - \frac{dY'}{dx} + \ldots\right)\delta y + (Z \quad \ldots)\,\delta z + \ldots\right] dx.$$

Cette expression de la variation de l'intégrale est, comme l'on voit, beaucoup plus simple.

VIII. — Condition pour qu'une fonction soit une dérivée exacte.

Nous avons déjà montré comment on pouvait intégrer l'expression $F(x, y, y', \ldots)$ sans particulariser la forme de la fonction y quand le problème était possible; nous allons reprendre cette question; pour en donner une nouvelle solution, à l'aide du calcul des variations, et ramener le problème à l'intégration d'une différentielle exacte, on obtient de cette façon la solution la plus nette.

Nous avons déjà fait observer (t. III, p. 215) que, si l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots)\,dx,$$

dans laquelle $y, y', y'', \ldots$ représentent une fonction de x et de ses dérivées, avait une valeur de la forme $f(x, y, y', \ldots)$, quelle que soit la forme donnée à y, sa valeur ne devait pas

changer en faisant varier la forme de y, sans changer sa valeur ou celle de ses dérivées pour $x = x_0$ et $x = x_1$. En effet, en appelant $f(x, y, y', \ldots)$ la fonction dont $F(x, y, y', \ldots)$ est la dérivée, la valeur de l'intégrale de F est

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots),$$

et ne varie pas si $y, y', y'', \ldots$ sont donnés pour $x = x_0$ et $x = x_1$; or, quand on suppose les quantités $x, y, y', \ldots$ invariables aux limites, on a

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (Y\,\delta y + Y'\,\delta y' + Y''\,\delta y'' + \ldots)\,dx,$$

$Y, Y', \ldots X$ désignant, pour abréger, $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x}$, et, en intégrant par parties, il vient

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} + \ldots\right) dx\,\delta y.$$

Pour que la variation de notre intégrale soit nulle, quel que soit δy, il faut que

$$(1) \qquad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \ldots = 0$$

ou que

$$Y - \left(\frac{\partial Y'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} y' + \frac{\partial Y'}{\partial y'} y'' + \ldots\right) + \ldots = 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Supposons-la satisfaite : faisons varier l'intégrale

$$f = \int_{x_0}^{x} F\,dx;$$

mais, en supposant la limite inférieure telle, que $x, y, y', \ldots$

y soient invariables, on aura

$$\begin{aligned}
\delta f &= \int_{x_0}^{x} (\delta F\,dx + F\,\delta\,dx) \\
&= F\,\delta x + \int_{x_0}^{x} (\delta F\,dx - dF\,\delta x) \\
&= F\,\delta x + \int_{x_0}^{x} [Y(\delta y\,dx - \delta x\,dy) + Y'(\delta y'\,dx - \delta x\,dy') + \ldots] \\
&= F\,\delta x + \int_{x_0}^{x} [Y(\delta y - y'\,\delta x) + Y'(\delta y' - y''\,\delta x) + \ldots]\,dx;
\end{aligned}$$

si l'on fait $\delta y - y'\,\delta x = \omega$, on a vu que

$$\delta y' - y''\,\delta x = \omega', \quad \ldots$$

Ainsi l'on a

$$\delta f = F\,\delta x + \int_{x_0}^{x} (\omega Y + \omega' Y' + \omega'' Y'' + \ldots)\,dx$$

ou

$$\begin{aligned}
\delta f = F\,\delta x &+ \omega Y' + \omega' Y'' + \omega'' Y''' + \ldots \\
&- \omega\,\frac{dY''}{dx} - \omega'\,\frac{dY'''}{dx} - \ldots + \omega\,\frac{dY}{dx} + \ldots,
\end{aligned}$$

en observant que le coefficient de ω sous le signe $\int$ est précisément le premier membre de (1), c'est-à-dire nul. Si l'on remplace alors ω par sa valeur, on a

$$\begin{aligned}
\delta f = F\,\delta x &+ (\delta y - y'\,\delta x)\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \ldots\right) \\
&+ (\delta y' - y''\,\delta x)\left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \ldots\right) \ldots;
\end{aligned}$$

cette expression est de la forme

$$\delta f = U\,\delta x + V\,\delta y + V'\,\delta y' + V''\,\delta y'' + \ldots$$

et, par suite, f est l'intégrale de la différentielle totale

$$U\,\delta x + V\,\delta y + \ldots.$$

que l'on peut maintenant écrire sans inconvénient

$$U\,dx + V\,dy + V'\,dy' + \ldots,$$

en considérant $x, y, y', \ldots$ comme des variables indépendantes.

IX. — Recherche du maximum ou du minimum d'une intégrale définie.

Problème. — $F(x, y, z, y', z', y'', \ldots)$ *désignant une fonction donnée de* x, y, z *et des dérivées* $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$, $\ldots$, *on propose de trouver les fonctions de* x *qui, mises à la place de* y, z, *rendront maxima ou minima l'intégrale définie*

$$u = \int_{x_0}^{x} F\,dx.$$

Pour résoudre cette question, on fera varier l'intégrale u, et l'on exprimera que $\delta u = 0$. En effet, pour exprimer que y, z rendent u maximum ou minimum, il faudra exprimer que, quand ces fonctions changent de forme infiniment peu, quels que soient les changements de forme éprouvés par y et z, u prend toujours un accroissement de même signe, ces changements de forme pouvant être censés produits par la variation d'un ou de plusieurs paramètres α_1, α_2, ... Le problème que nous voulons traiter ne diffère pas des problèmes ordinaires de maxima et de minima; il faut donc que la différentielle totale de u relative aux α ou δu soit nulle. Il faut aussi que $\delta^2 u$ reste toujours positif pour qu'il y ait minimum, et négatif pour qu'il y ait maximum. Heureusement, la plupart du temps il n'est pas nécessaire de calculer $\delta^2 u$, ce qui serait fort pénible, et, par la nature même de la question, il est facile de discerner le maximum et le minimum.

De quelque manière que l'on s'y prenne pour calculer δu, on doit obtenir les mêmes résultats; nous avons vu cependant

la variation δu affecter deux formes différentes (p. 363 et p. 365), à savoir

$$(1) \qquad \delta u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H} + \int_{x_0}^{x_1} (\Omega\omega - \Pi\varpi)\,dx,$$

$$(2) \qquad \delta u = \int_{x_0}^{x_1} \Delta + \int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{A}\,\delta x + \mathrm{B}\,\delta y - \mathrm{C}\,\delta z);$$

d'après la forme (1), pour que l'on ait $\delta u = 0$, il faut que l'on ait séparément

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H} = 0, \qquad \Omega = 0, \qquad \Pi = 0.$$

En effet, $\omega = \delta y - y'\delta x$ et $\varpi = \delta z - z'\delta x$ sont arbitraires; on peut donc les choisir tels que, si Ω et Π ne sont pas nuls, l'intégrale ait tous ses éléments de même signe, et de même signe que $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H}$ si cette quantité n'est pas nulle; et alors δu ne sera pas nul. Ainsi les formules (3) sont les conditions du maximum ou du minimum; d'ailleurs, pour que $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H}$ soit nul, il faut que les coefficients des variables indépendantes qu'il contient soient nuls.

Un raisonnement analogue fait sur la formule (2) montre que les conditions du maximum ou du minimum sont aussi

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \Delta = 0, \qquad \mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{C} = 0.$$

Il semble que l'on trouve ainsi une condition de plus; mais les conditions (4) rentrent dans les conditions (3), et, bien que l'identification des formules (3) et (4) ne soit pas une tâche au-dessus des forces de l'Analyse, on peut voir *a priori* que les formules (4) peuvent se réduire à un nombre moindre d'une unité.

Les équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sont des équations différentielles dans lesquelles la variable indépendante est t; les équations $\Omega = 0$, $\Pi = 0$ sont des équations différentielles dans lesquelles la variable indépendante est x. Dans le premier cas x, y, z sont des fonctions à déterminer; dans le second, y et z sont seuls à déterminer et le problème est résolu. Dans le premier cas, après avoir calculé x, y, z en fonction de t, il faut éliminer t pour avoir le résultat, de sorte que les équations $\Omega = 0$, $\Pi = 0$ sont ce que deviennent $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ quand on a éliminé t. Comme, d'ailleurs, la relation qui lie x à t est arbitraire, les équations (4) ne nous apprennent rien de plus que les équations (3).

Dans la pratique, les équations (4) devront être préférées aux équations (3), d'abord parce qu'elles sont plus symétriques, et ensuite précisément à cause de l'indétermination de la variable indépendante, ce qui est un avantage que nous avons eu souvent l'occasion d'apprécier.

X. — Résolution de quelques problèmes.

Problème I. — *Trouver le plus court chemin d'un point à un autre.*

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'un des points par rapport à trois axes rectangulaires, x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'autre; il s'agit de rendre minima l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

qui exprime la longueur de la courbe cherchée. Calculons δu pour l'égaler à 0 : en supposant les limites variables et en les supposant tacitement remplacées par t_0 et t_1, la variable d'intégration étant t et non plus x, on a

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \delta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ou

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds},$$

en écrivant ds au lieu de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. En intégrant par parties, on a alors

$$\delta u = \left|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z \right) - \int_{x_0}^{x_1} \left(d\,\frac{dx}{ds}\,\delta x + d\,\frac{dy}{ds}\,\delta y + d\,\frac{dz}{ds}\,\delta z \right).\right.$$

Pour qu'il y ait minimum, il faut donc que l'on ait

(1) $$d\,\frac{dx}{ds} = 0, \qquad d\,\frac{dy}{ds} = 0, \qquad d\,\frac{dz}{ds} = 0,$$

(2) $$\left|_{x_0}^{x_1} (dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) = 0.\right.$$

Les équations (1) donnent

$$dx = a\,ds, \qquad dy = b\,ds, \qquad dz = c\,ds,$$

a, b, c désignant trois constantes, qui se réduisent à deux si l'on prend x pour variable et si l'on écrit ces équations

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

(3) $$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c}.$$

Ces équations sont celles d'une droite, et le plus court chemin cherché est une droite; il reste à déterminer les constantes a, b, c, α, β, γ. Nous allons examiner les divers cas qui peuvent se présenter.

Premier cas. — *Les deux points x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 sont donnés fixes.* Alors $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, $\delta z_0 = 0$; $\delta x_1 = 0$,

$\delta y_1 = 0$, $\delta z_1 = 0$, et la formule (2) est satisfaite d'elle-même. Les constantes α, β, γ, a, b, c se déterminent en exprimant que la droite (3) passe par les points fixes donnés.

Deuxième cas. — *Les deux points x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 doivent être situés sur deux surfaces*

$$(4)\qquad \varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Alors à la formule (2), que l'on peut écrire

$$(5)\quad \delta x_1\, dx_1 + \delta y_1\, dy_1 + \delta z_1\, dz_1 - \delta x_0\, dx_0 - \delta y_0\, dy_0 - \delta z_0\, dz_0 = 0,$$

il faut adjoindre les équations obtenues en différentiant (4) par rapport aux paramètres α, ce qui donne

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}\,\delta y_0 + \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}\,\delta z_0 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\,\delta y_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}\,\delta z_1 = 0, \end{cases}$$

éliminer deux variations entre (5) et (6), égaler à zéro les coefficients des variations restantes ou bien, en employant la méthode des multiplicateurs, poser

$$dx_0 + \lambda_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} = 0, \qquad dy_0 + \lambda_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} = 0, \qquad dz_0 + \lambda_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0} = 0,$$

$$dx_1 + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = 0, \qquad dy_1 + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} = 0, \qquad dz_1 + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} = 0,$$

ce qui donne, en éliminant les multiplicateurs λ_0 et λ_1,

$$\frac{dx_0}{\left(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\right)} = \frac{dy_0}{\left(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}\right)} = \frac{dz_0}{\left(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}\right)},$$

$$\frac{dx_1}{\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)} = \frac{dy_1}{\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\right)} = \frac{dz_1}{\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}\right)}.$$

Ces équations expriment qu'un déplacement effectué sur la droite qui est le chemin minimum est normal à chacune des

surfaces (4); la droite (3) aura donc ses constantes a, b, c, α, β, γ déterminées par cette condition qu'elle devra être normale aux deux surfaces.

Troisième cas. — *Les deux points x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1 sont l'un fixe, l'autre assujetti à demeurer sur la surface*

$$\varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Ce cas se traite facilement en supposant $\delta x_1 = \delta y_1 = \delta z_1 = 0$; la droite cherchée est alors la normale menée x_1, y_1, z_1 à la surface $\varphi_0 = 0$.

Quatrième cas. — Les points x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 sont assujettis à se trouver sur les courbes

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0, & \varphi_1 = 0, \\ \psi_0(x_0, y_0, z_0) = 0, & \psi_1 = 0; \end{cases}$$

à l'équation (2)

$$dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 + dz_1\,\delta z_1 - dx_0\,\delta x_0 - dy_0\,\delta y_0 - dz_0\,\delta z_0 = 0$$

il faudra adjoindre celles que l'on obtient en différentiant (7), à savoir

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \ldots = 0, \qquad \frac{\partial\psi_0}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \ldots = 0, \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \ldots = 0;$$

en éliminant quatre des variations δx_0, δy_0, ... et en égalant à zéro les coefficients des variations restantes, on aura les équations déterminant les constantes a, b, c, α, β, γ. En faisant usage de la méthode des multiplicateurs, on a

$$dx_0 + \lambda_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} + \mu_0 \frac{\partial\psi_0}{\partial x_0} = 0,$$

$$dy_0 + \lambda_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} + \mu_0 \frac{\partial\psi_0}{\partial y_0} = 0,$$

$$dz_0 + \lambda_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0} + \mu_0 \frac{\partial\psi_0}{\partial z_0} = 0,$$

et trois autres équations obtenues en changeant l'indice o en 1; on en déduit

$$dx_0 \frac{\partial(\varphi_0, \psi_0)}{\partial(y_0, z_0)} + dy_0 \frac{\partial(\varphi_0, \psi_0)}{\partial(z_0, x_0)} + dz_0 \frac{\partial(\varphi_0, \psi_0)}{\partial(x_0, y_0)} = 0,$$

qui exprime que la direction dx_0, dy_0, dz_0 ou a, b, c de la droite est normale à la direction de la tangente à la courbe $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$; elle est évidemment normale à l'autre courbe.

On voit sans peine comment on traiterait le cas où l'une des extrémités du chemin cherché serait assujettie à demeurer sur une surface et l'autre sur une courbe, etc.

Problème II. — *Trouver sur une surface la ligne la plus courte entre deux points.*

L'intégrale à rendre minima est, comme dans la question précédente,

$$(1) \qquad u = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

mais x, y et z ne sont plus indépendants les uns des autres, et l'on a entre eux une relation

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

qui est l'équation de la surface : on devra donc remplacer z par sa valeur tirée de (2) avant de faire varier l'intégrale; mais on peut aussi faire d'abord varier l'intégrale, puis tenir compte de la relation (2) en observant que $\delta f = 0$, ou que

$$(3) \qquad f_1 \delta x + f_2 \delta y + f_3 \delta z = 0,$$

en posant, pour abréger, $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$; on a alors

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx\, d\,\delta x + dy\, d\,\delta y + dz\, d\,\delta z}{ds},$$

en désignant $dx^2 + dy^2 + dz^2$ par ds^2, ou

$$\delta u = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right)$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} \left(d\,\frac{dx}{ds}\,\delta x + d\,\frac{dy}{ds}\,\delta y + d\,\frac{dz}{ds}\,\delta z\right).$$

Pour que δu soit nul, il faut que la quantité placée sous le signe $\int$ soit nulle; car, en vertu de (3), elle se réduira à la forme $A\,\delta x + B\,\delta y$ et les coefficients de δx, δy qui sont arbitraires devront être nuls; ainsi l'on doit avoir

$$d\,\frac{dx}{ds}\,\delta x + d\,\frac{dy}{ds}\,\delta y + d\,\frac{dz}{ds}\,\delta z = 0.$$

En combinant cette formule avec (3) et en employant la méthode des multiplicateurs pour éliminer les variations, on a

$$f_1 + \lambda\,d\,\frac{dx}{ds} = 0, \qquad f_2 + \lambda\,d\,\frac{dy}{ds} = 0, \qquad f_3 + \lambda\,d\,\frac{dz}{ds} = 0;$$

d'où, en prenant s pour variable indépendante,

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{f_1} = \frac{d^2y}{f_2} = \frac{d^2z}{f_3}.$$

La courbe cherchée a donc sa normale principale en coïncidence avec la normale à la surface; son plan osculateur est normal à la surface. Les lignes qui jouissent de cette propriété portent le nom de *géodésiques :* nous les étudierons plus loin.

Si les points x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 sont fixes, on aura $\delta u = 0$, en prenant

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right) = 0,$$

et cette équation sera satisfaite d'elle-même, δx_0, δy_0, ... étant tous nuls. Pour résoudre la question, on intégrera les

équations (4), puis on déterminera les constantes d'intégration en exprimant que la courbe passe par les points fixes x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1.

Si l'un des points x_0, y_0, z_0 était assujetti à se trouver sur une courbe fixe, l'autre étant par exemple fixe, on aurait d'abord

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

pour l'une des équations de cette courbe, et

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$$

pour l'autre équation; par suite,

$$f_1 \delta x_0 + f_2 \delta y_0 + f_3 \delta z_0 = 0,$$
$$\varphi_1 \delta x_0 + \varphi_2 \delta y_0 + \varphi_3 \delta z_0 = 0,$$

et (5) donnerait

$$dx_0 \delta x_0 + dy_0 \delta y_0 + dz_0 \delta z_0 = 0,$$

d'où

$$dx_0 \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(y_0, z_0)} + dy_0 \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(z_0, x_0)} + dz_0 \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x_0, y_0)} = 0,$$

ce qui exprime que la géodésique est normale à la courbe $f = 0$, $\varphi = 0$.

XI. — Sur une classe d'équations différentielles.

La recherche du maximum ou du minimum de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,dx,$$

dans laquelle F désigne une fonction de x, y, z, ..., conduit à l'intégration des équations différentielles

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \ldots = 0,$$
$$Z - \frac{dZ'}{dx} + \frac{d^2 Z''}{dx^2} - \ldots = 0,$$

parfois fort difficiles à intégrer. $\left(Y, Y', \ldots, Z, Z', \ldots\right.$ ont toujours les mêmes significations que plus haut : $\left.Y = \frac{\partial F}{\partial y} \cdots\right)$ Supposons que la fonction F ne contienne qu'une fonction inconnue y : c'est ce qui arrivera toutes les fois que l'on aura à rechercher une propriété de maximum relative à une courbe plane. Si la fonction y n'entre dans F que par ses dérivées, l'équation différentielle à intégrer sera

$$(1) \qquad \frac{dY'}{dx} - \frac{d^2Y''}{dx^2} + \ldots = 0,$$

et l'on aura immédiatement une intégrale première

$$Y' - \frac{dY''}{dx} + \ldots = \text{const.}$$

Il se présente une simplification analogue quand F ne contient pas la variable x; en effet, on a alors

$$dF = Y\,dy + Y'\,dy' + \ldots$$

ou

$$dF = (Yy' + Y'y'' + \ldots)\,dx;$$

éliminant alors Y entre cette équation et l'équation à intégrer

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \ldots = 0,$$

on a, en supposant $Y''' = 0$, $Y^{\text{IV}} = 0$, ...,

$$dF = \left(Y'y'' + \frac{dY'}{dx}y'\right)dx + \left(Y''y''' - \frac{d^2Y''}{dx^2}y'\right)dx.$$

Cette équation peut s'écrire

$$dF = d(Y'y') + d\left(Y''y'' - \frac{dY''}{dx}y'\right)$$

et s'intègre immédiatement. L'équation du problème est donc simplement

$$F = Y'y' + Y''y'' - \frac{dY''}{dx}y' + \text{const.}$$

Quand ni y ni x n'entrent dans F non plus que les dérivées

d'ordre supérieur à 2, les simplifications dont nous venons de parler se présentent à la fois ; d'abord, y n'entrant pas dans l'équation à intégrer, celle-ci se réduit à

$$\frac{dY'}{dx} - \frac{d^2 Y''}{dx^2} = 0;$$

d'où l'on tire, en appelant a une constante,

$$Y' - \frac{dY''}{dx} = a;$$

comme l'on a en outre

$$dF = (Y'y'' + Y''y''')\,dx,$$

l'élimination de Y' donne

$$dF = \left(Y''y''' + \frac{dY''}{dx}\,y''\right)dx + a\,dy'$$

ou

$$dF = d(Y''y'') + a\,dy',$$

équation immédiatement intégrable. Faisons une application de ces principes :

Problème. — *Trouver une courbe plane qui, passant par deux points fixes, soit telle que l'aire comprise entre la courbe, sa développée et ses rayons de courbure extrêmes soit un minimum.*

En appelant x, y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe x_0, y_0 et x_1, y_1 les coordonnées de ses extrémités, l'intégrale à rendre minima est

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\,dx;$$

ici

$$F = \frac{(1+y'^2)^2}{y''}, \qquad Y = 0, \qquad X = 0, \qquad Y'' = -(1+y'^2)^2\,\frac{1}{y''^2}.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée est

$$d\,\frac{1+y'^2}{y''} = d\left[-(1+y'^2)\,\frac{1}{y''^2}\,y''\right] + a\,dy$$

ou

$$\frac{2(1+y'^2)}{y''} = ay' + b,$$

b désignant une nouvelle constante; ce que l'on peut écrire, en appelant R le rayon de courbure, s l'arc de la courbe cherchée,

$$2\mathrm{R}\frac{ds}{dx} = a\frac{dy}{dx} + b$$

ou

$$2\mathrm{R} = a\frac{dy}{ds} + b\frac{dx}{ds}.$$

Posant

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

$$a = r\cos\alpha, \qquad b = r\sin\alpha,$$

on a

$$2\mathrm{R} = r\cos(\varphi - \alpha)$$

ou, en faisant tourner l'axe des x de l'angle α,

$$2\mathrm{R} = r\cos\varphi.$$

Or $\mathrm{R} = \frac{ds}{d\varphi}$, car $d\varphi$ est l'angle de contingence; on a donc

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{r}{2}\cos\varphi$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{r}{2}\cos^2\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{r}{2}\sin\varphi\cos\varphi;$$

en intégrant, il vient

$$x = \frac{r}{4}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi) + \text{const.},$$

$$y = \frac{r}{8}(\cos 2\varphi + 1) + \text{const.}$$

Ces équations sont évidemment celles d'une cycloïde.

Remarque. — Si l'on avait cherché le maximum ou le

minimum de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y''}{(1+y'^2)}\,dx,$$

ce qui revient à chercher la courbe qui, passant par deux points fixes, présente une courbure moyenne minima, l'équation différentielle du problème se fût réduite à une identité, et, en effet, la quantité placée sous le signe est une dérivée quel que soit y et, par suite, l'intégrale ne dépend que de x_0, y_0, x_1, y_1; les points x_0, y_0 et x_1, y_1 étant fixes, elle est constante et, par suite, n'est pas susceptible de minimum.

XII. — Maximum et minimum relatifs.

On a souvent à rendre une intégrale définie maxima ou minima, pendant qu'une ou plusieurs autres intégrales sont assujetties à conserver des valeurs constantes. Ces questions, qui sont dites *questions de maximum ou de minimum relatif*, se résolvent toujours d'après les mêmes principes.

Supposons qu'il s'agisse de rendre maxima l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\,dx,$$

sachant que les intégrales

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{P}\,dx, \qquad w = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{Q}\,dx$$

sont assujetties à conserver des valeurs constantes.

Si l'on cherchait à résoudre ce problème par les méthodes ordinaires, on écrirait

$$\delta u = 0, \qquad \delta v = 0, \qquad \delta w = 0;$$

mais ces équations sont incompatibles si l'on suppose que u, v, w, ... ne dépendent que d'un seul paramètre α. Aussi imaginerons-nous, pour les besoins de la circonstance, que x,

y, z, ..., dépendent non seulement de t, mais de plusieurs autres paramètres α, α', α'', ..., en nombre égal au nombre des conditions données; δU sera alors la différentielle totale de la fonction U relative aux variables α, α', α'', ..., la variable t restant constante.

On pourra alors trouver le maximum ou le minimum de u en écrivant

$$\delta u = 0, \qquad \delta v = 0, \qquad \delta w = 0.$$

L'application de la méthode des multiplicateurs à ces équations conduit, comme l'on sait, à rendre maxima l'expression

$$u + \lambda v + \mu w,$$

où λ, μ sont des quantités constantes que l'on détermine en écrivant que les intégrales v et w ont des valeurs données.

Nous allons faire une application de cette règle au problème des *isopérimètres*.

Problème. — *De toutes les courbes fermées, à contour simple, de même longueur, quelle est celle qui comprend la surface maxima.*

Si l'on prend des coordonnées polaires r, θ et si l'on appelle l la longueur des courbes considérées, il faudra rendre

$$u = \int_0^{2\pi} r^2\, d\theta$$

maximum, sachant que

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}.$$

On rendra d'abord

$$\int_0^{2\pi} \left(r^2\, d\theta + \lambda \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2} \right)$$

maximum, en égalant à o la variation de cette intégrale; on aura alors

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(2r\, d\theta\, \delta r + r^2\, d\,\delta\theta + \lambda \frac{dr\, \delta\, dr + r^2\, d\theta\, \delta\, d\theta + d\theta^2\, r\, \delta r}{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}} \right),$$

et, en intégrant par parties,

$$o = \int_0^{2\pi} \left[\left(2r\,d\theta - \lambda\, d\frac{dr}{\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}} + \frac{\lambda\, r\, d\theta^2}{\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}} \right) \delta r - \left(2r\,dr + \lambda\, d\frac{r^2\,d\theta}{\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}} \right) \delta\theta \right];$$

égalons à zéro les coefficients de δr et $\delta\theta$, nous aurons

$$2r\,d\theta - \lambda\, d\frac{dr}{ds} - \lambda r \frac{d\theta^2}{ds} = o, \qquad 2r\,dr + \lambda\, d\frac{r^2\,d\theta}{ds} = o,$$

s désignant l'arc de courbe $\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}$. La seconde équation donne

$$r^2 + \lambda \frac{r^2\,d\theta}{ds} = a^2,$$

a désignant une constante : on en conclut

$$ds = \frac{\lambda\, r^2\,d\theta}{a^2 - r^2}$$

ou

$$\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2} = \frac{\lambda\, r^2\,d\theta}{a^2-r^2};$$

on en tire

$$d\theta = \frac{(a^2-r^2)\,dr}{r\sqrt{\lambda^2 r^2 - (a^2-r^2)^2}} = \frac{(a^2-r^2)\,dr}{r\sqrt{(\lambda^2+4a^2)r^2-(a^2+r^2)^2}},$$

ce que l'on peut écrire en posant $\lambda'^2 = \lambda^2 + 4a^2$,

$$d\theta = \frac{\dfrac{a^2-r^2}{\lambda' r^2}\,dr}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a^2+r^2}{\lambda' r}\right)^2}};$$

or la dérivée de $\dfrac{a^2+r^2}{\lambda' r}$ est égale à $-\dfrac{a^2-r^2}{\lambda' r^2}$; donc, en intégrant, on a

$$\theta - \theta_0 = \arccos\frac{a^2-r^2}{\lambda' r},$$

d'où l'on tire

$$r^2 + \lambda' r\cos(\theta-\theta_0) - a^2 = o.$$

C'est l'équation d'un cercle, ainsi que l'on peut s'en assurer en revenant aux coordonnées rectilignes ; λ' se détermine en écrivant que la longueur de la circonférence est égale à l. Il reste deux constantes arbitraires dans la solution et cela doit être, car tous les cercles égaux satisfont à la question et contiennent dans leur expression deux paramètres arbitraires.

La même équation différentielle et la même méthode conduiraient à la démonstration de ce théorème :

De toutes les figures de même aire le cercle a le plus petit contour.

XIII. — Cas où il existe une relation différentielle entre les fonctions qui entrent sous le signe $\int$.

Je suppose qu'il s'agisse de rendre l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}\, dx$$

maxima ou minima, sachant que, entre les fonctions inconnues $y, z, \ldots$ dont elle dépend, il existe une ou plusieurs relations différentielles ou finies

$$\Omega = 0, \qquad \Omega' = 0, \qquad \ldots ;$$

on ramènera ce cas à celui que l'on a étudié au paragraphe précédent, en observant que les formules précédentes sont équivalentes à

$$\int_{x^0}^{x_1} \Omega^2\, dx = 0, \qquad \int_{x_1}^{x_1} \Omega'^2\, dx = 0, \qquad \ldots .$$

Faisons une application de ces principes au calcul du maximum de

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y, z;\, dx, dy, \ldots),$$

sachant que

$$f(x, y, z) = 0.$$

On aura à chercher le maximum de

$$\int (\mathrm{F} + \lambda f^2\, dx);$$

on posera alors

$$(1) \qquad \int (\delta\mathrm{F} + 2\lambda f\,\delta f) = 0.$$

Soit

$$\mathrm{A}\,\delta x + \mathrm{B}\,\delta y + \mathrm{C}\,\delta z$$

la valeur que prendrait la quantité placée sous le signe $\int$ si l'on voulait calculer δu. La quantité placée sous le signe $\int$ dans (1) sera

$$\left(\mathrm{A} + 2\lambda f\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(\mathrm{B} + 2\lambda f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(\mathrm{C} + 2\lambda f\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z,$$

et l'on devra égaler à zéro les coefficients δx, δy, δz, ce qui donnera

$$\mathrm{A} + 2\lambda f\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\mathrm{B} + 2\lambda f\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\mathrm{C} + 2\lambda f\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

et les conditions du maximum s'obtiennent en éliminant λ ou $2\lambda f$.

On peut modifier un peu la méthode précédente. Les équations $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$ peuvent être remplacées par

$$\int \theta^2\Omega^2\, dx = 0, \qquad \int \theta'^2\Omega'^2\, dx = 0,$$

θ et θ' désignant des fonctions arbitraires : on est alors conduit à chercher le maximum ou le minimum de

$$\int (\mathrm{F} + \lambda\theta^2\Omega^2 + \lambda'\theta'^2\Omega'^2)\, dx$$

et à déterminer λ et λ' de telle sorte que $\int \theta^2\Omega^2\, dx$ et $\int \theta'^2\Omega'^2\, dx$

soient nuls. Or, si l'on pose $\lambda\theta^2\Omega = \mu$, $\lambda'\theta'^2\Omega'^2 = \mu'$, cela revient à rendre

$$\int (\mathrm{F} + \mu\Omega + \mu'\Omega')\,dx$$

maximum ou minimum et à disposer de μ et μ' de telle sorte que $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$; mais on pourra traiter μ et μ' comme des constantes par rapport à la caractéristique δ, car les coefficients de $\delta\mu$ et $\delta\mu'$, quand on fera varier l'intégrale précédente, seront Ω et Ω' nuls par hypothèse.

C'est ici l'occasion de signaler une erreur que l'on pourrait être tenté de commettre dans la recherche des courbes qui satisfont à certaines conditions de maximum. On ne peut pas prendre l'arc pour variable d'intégration, et cela parce que les $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ ne sont pas arbitraires, mais bien liés par la relation

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1,$$

qui impose à $\frac{dx}{ds}$ et à $\frac{dy}{ds}$ la condition de rester moindres que l'unité. C'est ainsi que $\int_{s_0}^{s_1} y\,ds$ n'a pas de minimum en lui-même, mais en acquiert un en supposant que s satisfasse à la relation qui précède. Pour trouver le minimum de $\int y\,ds$, c'est-à-dire la courbe qui, par sa révolution autour de l'axe des x, fournit la surface d'aire minima, il faut chercher le minimum de

$$\int \left(y\,ds + \lambda\,\frac{dx^2 + dy^2 - ds^2}{ds} \right);$$

la variation de cette intégrale est

$$\int \left[\delta y\,ds + y\,\delta ds + 2\lambda\,\frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy - ds\,\delta ds}{ds} - \frac{\lambda}{ds^2}(dx^2 + dy^2 - ds^2)\,\delta ds \right]$$

ou

$$\Big|^{1}\left[y\,\delta s + 2\lambda\left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y - \delta s\right) - \lambda\left(\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} - 1\right)\delta s\right]$$

$$+\int\Big[\delta y\,ds - dy\,\delta s - 2\,\delta x\,d\,\frac{\lambda\,dx}{ds} - 2\,\delta y\,d\,\frac{\lambda\,dy}{ds} + \left(d\,\frac{\lambda\,dx^2}{ds^2} + d\,\frac{\lambda\,dy^2}{ds^2}\right)\delta s\Big].$$

En égalant à zéro les coefficients de δx, δy, δs, on a

$$d\,\frac{\lambda\,dx}{ds} = 0, \qquad ds = 2\,d\,\frac{\lambda\,dy}{ds},$$

$$(b) \qquad dy - d\,\frac{\lambda\,dx^2}{ds^2} - d\,\frac{\lambda\,dy^2}{ds^2} = 0.$$

Laissons de côté la dernière équation, qui est la plus compliquée; les deux premières donnent

$$\frac{\lambda\,dx}{ds} = \frac{a}{2}, \qquad b + s = 2\lambda\,\frac{dy}{ds},$$

b et a désignant des constantes. A ces équations on doit joindre la suivante :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1;$$

les deux premières, élevées au carré, donnent, en tenant compte de celle-ci,

$$\frac{a^2}{4\lambda^2} + \frac{(b+s)^2}{4\lambda^2} = 1,$$

d'où

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b+s)^2}{4};$$

il en résulte, par l'élimination de λ,

$$\frac{dx}{ds}\sqrt{a^2 + (b+s)^2} = a, \qquad \frac{dy}{ds}\sqrt{a^2 + (b+s)^2} = b + s;$$

on en tire

$$x = a\log\left[b - s \pm \sqrt{a^2 - (b - s)^2}\right] + \text{const.},$$
$$y = \sqrt{a^2 - (b - s)^2} + \text{const.};$$

éliminant s ou $b - s$, on a

$$x = a\log\left(\frac{\sqrt{y^2 - a^2} - y}{a}\right) + \text{const.}$$

ou, en négligeant les constantes,

$$\frac{1}{a}\left(y + \sqrt{y^2 - a^2}\right) = e^{\frac{x}{a}},$$
$$\frac{1}{a}\left(y - \sqrt{y^2 - a^2}\right) = e^{-\frac{x}{a}},$$

donc

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

La courbe cherchée est donc une chaînette. Si nous supposons les points limites fixes, δy et δx sont nuls aux limites; quant aux coefficients de δs_1 et δs_0, on peut observer que, sous le signe de substitution, le coefficient de δs a pour différentielle l'une des quantités qu'il a fallu égaler à zéro; ce coefficient est donc constant [équation(b)]; on a donc

$$k(\delta s_1 - \delta s_0) = 0,$$

k désignant une constante.

XIV. — Résolution de quelques problèmes.

La difficulté capitale du calcul des variations réside dans l'intégration des équations auxquelles on est conduit dans toutes les questions de maximum que l'on veut résoudre. Toutefois, même dans le cas où l'on ne sait pas intégrer les équations auxquelles on est conduit, le calcul des varia-

tions peut fournir des indications utiles. Considérons, par exemple, la question suivante :

Problème. — *Trouver sur une surface donnée la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maxima.*

Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface donnée; soient $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. La quantité à rendre maxima est

$$\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

et l'on pourra intégrer une fois, puisque z, p, q sont des fonctions données par (1) de x et y. Soit donc

$$v = \int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy;$$

il faut rendre

$$\int v\, dx = \int v \frac{dx}{ds}\, ds$$

maximum, sachant que le périmètre de la courbe le long de laquelle l'intégrale précédente est prise est donné. Si l'on prend l'arc s de cette courbe pour variable, on sera conduit à égaler à zéro la variation de l'intégrale

$$V = \int [v x' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu f]\, ds,$$

les accents désignant des dérivées relatives à s et λ, μ des constantes à déterminer par la condition que le périmètre de la courbe cherchée ait une longueur donnée. On a

$$\begin{aligned} \delta V = \int \Big[& x'\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\delta y\right) + v\,\delta x' \\ & + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z\right) + 2\lambda(x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z')\Big]\, ds \end{aligned}$$

ou bien

$$\delta V = \int \Big[\delta x \Big(-y' \frac{dv}{ds} - \mu \frac{\partial f}{\partial x} - 2\lambda x'' \Big) + \delta y \Big(x' \frac{dv}{ds} - \mu \frac{\partial f}{\partial y} - 2\lambda y'' \Big) - \delta z \Big(\mu \frac{\partial f}{\partial z} - 2\lambda z'' \Big) \Big] ds.$$

On doit poser, en observant que $\frac{dv}{ds} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$,

$$-y'\sqrt{1 + p^2 + q^2} - \mu \frac{\partial f}{\partial x} - 2\lambda x'' = 0,$$

$$x'\sqrt{1 + p^2 + q^2} - \mu \frac{\partial f}{\partial y} - 2\lambda y'' = 0,$$

$$\mu \frac{\partial f}{\partial z} - 2\lambda z'' = 0.$$

Ce sont les équations du problème, en général impossibles à intégrer, mais on peut trouver une propriété remarquable de la courbe qu'elles représentent. Prenons en effet pour plan des xy le plan tangent en x, y, z, pour axe des x la tangente à la courbe, les équations précédentes deviendront

$$x'' = 0, \qquad x' - 2\lambda y'' = 0, \qquad \mu \frac{\partial f}{\partial z} - 2\lambda z'' = 0.$$

Or, en appelant ω l'angle que la normale principale fait avec l'axe des y, c'est-à-dire avec le plan tangent, et ρ le rayon de courbure, on a

$$\rho y'' = \cos\omega$$

et, en observant que $x' = 1$, la seconde des formules précédentes donnera

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{1}{2\lambda} = \text{const.};$$

il en résulte que la courbe cherchée est telle que la projection de sa courbure sur le plan tangent ou, comme l'on dit, que sa courbure tangentielle est constante. Cette courbe a quelquefois reçu le nom de *cercle géodésique de la surface;* nous la retrouverons dans un autre Chapitre où ce nom de *cercle géodésique* sera justifié.

XV. — Théorème d'Hamilton.

Cherchons la variation de l'intégrale

$$\Theta = \int_{t_0}^{t} V\, dt,$$

dans laquelle V représente une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de leurs dérivées relatives à t, à savoir $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ et de t, nous aurons

$$\delta\Theta = \int_{t_0}^{t} \delta V\, dt = \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial x'}\,\delta x' \right) dt$$

ou, en appliquant l'intégration par parties,

$$(1) \qquad \delta\Theta = \Big|_{t_0}^{t} \sum \frac{\partial V}{\partial x'}\,\delta x + \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'} \right) \delta x\, dt.$$

Il résulte de là que, pour que l'on ait $\delta\Theta = 0$, il faut que l'on ait

$$(2) \qquad \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'} \right) \delta x = 0,$$

et si les variables x ne sont liées par aucune équation de condition

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial x'_1} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial x'_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

La formule (1) montre que, si les δx sont nuls aux limites et que si les formules (2) ont lieu, on aura $\delta\Theta = 0$. Cette remarque fournit un exemple curieux de changement de variables.

Supposons que, dans l'équation (2), on veuille substituer aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'autres variables en nombre égal ou différent $y_1, y_2, \ldots, y_k$, liées ou non par des équa-

tions de condition : V deviendra fonction des y, et l'on aura toujours $\delta\Theta = 0$ si l'on suppose les δy nuls aux limites. Or la formule (1) est alors remplacée par

$$\delta\Theta = \int_{t_0}^{t} \sum \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y + \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'}\right) \delta y \, dt.$$

Si l'on veut que $\delta\Theta = 0$, en supposant les δy nuls aux limites, on voit que l'on aura

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'}\right) \delta y = 0 :$$

c'est la transformée de l'équation (2). Or on peut toujours faire en sorte que les nouvelles variables y ne soient pas liées entre elles par des équations de condition : parmi les moyens d'arriver à ces résultats, on peut prendre pour variables y, $n-k$ des variables x, k désignant le nombre des relations qui lient les x, les autres variables devront alors être exprimées à l'aide de celles-ci au moyen des équations de condition. Il résulte de là que l'on pourra toujours remplacer la condition (2) par des équations telles que

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Supposons maintenant qu'il n'existe aucune relation entre les variables x et que l'on définisse ces fonctions de t au moyen des équations différentielles du second ordre (3). Supposons enfin, ce qui est permis, que la caractéristique δ représente une différentielle totale prise par rapport aux constantes en nombre $2n$ amenées par l'intégration des équations (3), l'équation (1) deviendra

$$\delta\Theta = \sum \frac{\partial V}{\partial x'} \delta x - \sum \frac{\partial V}{\partial x'^0} \delta x^0,$$

l'indice o placé en haut d'une lettre indiquant que l'on y

suppose $t = t_0$. Cette équation donne

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_1} = \dfrac{\partial V}{\partial x'_1}, & \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_2} = \dfrac{\partial V}{\partial x'_2}, & \ldots \\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_1^0} = -\dfrac{\partial V}{\partial x'^0_1}, & \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_2^0} = -\dfrac{\partial V}{\partial x'^0_2}, & \ldots \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$(5)\quad \frac{d\Theta}{dt} = V, \qquad \frac{d\Theta}{dt_0} = -V_0;$$

mais on a

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x} x',$$

$$\frac{d\Theta}{dt_0} = \frac{\partial\Theta}{\partial t_0} + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x^0} x'_0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (4) et (5),

$$(6)\quad \frac{\partial\Theta}{\partial t} = V - \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x} x',$$

$$(7)\quad \frac{\partial\Theta}{\partial t_0} = -V_0 + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x^0} x'_0.$$

Si l'on remplace dans ces équations x' et x'_0 par leurs valeurs tirées de (4) en fonction des $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ et des $\frac{\partial\Theta}{\partial x^0}$, on aura deux équations aux dérivées partielles auxquelles satisfera la fonction Θ.

Tel est le théorème d'Hamilton. Si l'on connaissait la fonction Θ, on voit que les équations (4) seraient les intégrales des équations (3), puisqu'elles sont n relations entre les x, les x', t, et $2n$ constantes arbitraires x_1^0, x_2^0, ..., $x_1'^0$, $x_2'^0$, ... Il y a donc grand intérêt à connaître cette fonction; mais on ne voit pas très bien comment on pourrait la calculer.

Jacobi a montré que, pour avoir les intégrales des équations (3), il n'était pas nécessaire d'avoir la fonction Θ elle-même, mais seulement *une* solution quelconque de l'équation (6)

$$(6)\quad \frac{\partial\Theta}{\partial t} = V - \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x} x',$$

où x' est tiré des équations de la forme

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x'},$$

pourvu que cette solution Θ renferme n constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Les intégrales de (3) sont alors

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_1} = \dfrac{\partial V}{\partial x'_1}, & \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_2} = \dfrac{\partial V}{\partial x'_2}, & \ldots; \\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, & \dfrac{\partial\Theta}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, & \ldots, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ désignant n nouvelles constantes arbitraires.

Pour démontrer ce théorème, nous déduirons les équations (3) de (8) par l'élimination des α et des β, en nous appuyant sur ce que Θ est solution de (6). On a

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

et, en vertu de (6),

$$\frac{d\Theta}{dt} = V - \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x} x' + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

et, en différentiant par rapport aux α avec la caractéristique δ,

$$\begin{aligned} \delta\frac{d\Theta}{dt} &= \sum \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \sum \frac{\partial V}{\partial x'}\delta x' - \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x}\delta x' \\ &\quad + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x}\delta\frac{dx}{dt} - \sum x'\delta\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \sum \frac{dx}{dt}\delta\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de (8),

$$(9)\quad \delta\frac{d\Theta}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \sum \frac{\partial V}{\partial x'}\delta\frac{dx}{dt} - \sum\left(x' - \frac{dx}{dt}\right)\delta\frac{\partial V}{\partial x'};$$

d'un autre côté, on a

$$\delta\Theta = \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x}\delta x + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial \alpha}\delta\alpha$$

ou, en vertu de (8),

$$\delta\Theta = \sum \frac{\partial V}{\partial x'}\delta x + \sum \beta\,\delta\alpha$$

et, par suite,

$$\delta\frac{d\Theta}{dt} = \sum\frac{\partial V}{\partial x'}\,\delta\frac{dx}{dt} + \sum\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'}\,\delta x.$$

Retranchant cette formule de (9), on a

$$0 = \sum\delta x\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'}\right) - \sum\left(x' - \frac{dx}{dt}\right)\delta\frac{\partial V}{\partial x'};$$

mais, les $\delta\alpha$ et les $\delta\beta$ étant arbitraires, il en est de même des δx et des $\delta\frac{\partial V}{\partial x'}$; on doit donc avoir

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'} = 0, \qquad x' = \frac{dx}{dt},$$

ce qui montre que les équations (3) sont des conséquences de (8), en d'autres termes, que (8) sont les intégrales de (3). Nous verrons qu'il y a des cas dans lesquels il est plus simple de deviner une solution de (6) que d'intégrer les équations (3).

XVI. — Application à la Dynamique.

Les équations du mouvement d'un système de points de masses m_1, m_2, ... ayant pour coordonnées x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, ... sont, en désignant le travail par δQ,

$$(1) \qquad \sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\delta z_i\right) = \delta Q;$$

si l'on fait alors

$$2T = \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

on a

$$mx_i' = \frac{\partial T}{\partial x_i'}, \qquad my_i' = \frac{\partial T}{\partial y_i'}, \qquad mz_i' = \frac{\partial T}{\partial z_i'},$$

ce qui permet d'écrire l'équation (1) de la manière suivante :

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'}\right)\delta x_i = -\delta Q;$$

si aux coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ on en substitue d'autres q_1, $q_2, \ldots$ on a (p. 394)

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = - \delta Q.$$

Supposons $\delta Q = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots$ si les variables q_1, $q_2, \ldots$ ne sont pas liées entre elles, si elles sont indépendantes, cette équation se décomposera en d'autres de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} - Q_i = 0.$$

XVII. — Réduction à la forme canonique.

C'est Lagrange qui a fait connaître les équations du mouvement avec les coordonnées q quelconques (*Mécanique analytique*). Hamilton passe pour les avoir mises sous la forme dite *canonique* (en 1834, *Transactions philosophiques*). Mais Cauchy avait déjà fait usage de cette forme canonique en 1831, dans un Mémoire très rare publié à Turin.

Reprenons l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial V}{\partial x'_i}, \qquad \text{où} \qquad \frac{dx_i}{dx} = x'_i,$$

qui se rencontre dans les questions de Dynamique et dans un grand nombre de questions relatives au calcul des variations : supposons la fonction V homogène et de degré m par rapport aux x'_i ; on aura

$$m V = \sum x'_i \frac{\partial V}{\partial x'_i};$$

on en tire

$$(m-1) V = - V + \sum x'_i \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

et, en différentiant avec la caractéristique δ,

$$(m-1) \delta V = - \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i - \sum \frac{\partial V}{\partial x'_i} \delta x'_i + \sum \frac{\partial V}{\partial x'_i} \delta x'_i + \sum x'_i \delta \frac{\partial V}{\partial x'_i}$$

ou

$$(m-1)\,\delta V = -\sum \frac{\partial V}{\partial x_i}\,\delta x_i + \sum x'_i\,\delta\,\frac{\partial V}{\partial x'_i}.$$

Cette formule montre que, si l'on prend pour variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $\frac{\partial V}{\partial x'_1} = p_1$, $\frac{\partial V}{\partial x'_2} = p_2$, ... on aura

$$\frac{dV}{dx_i} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad \frac{dV}{dp_i} = \frac{1}{m-1}\,x'_i = \frac{1}{m-1}\,\frac{dx_i}{dx};$$

on aura donc

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial V}{\partial x'_i} = -(m-1)\,\frac{dV}{dx_i} - \frac{dp_i}{dx}, \qquad \frac{1}{m-1}\,\frac{dx_i}{dx} = \frac{dV}{dp_i}.$$

Des équations de la forme

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial V}{\partial x'_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \qquad x'_i = \frac{dx_i}{dx},$$

où U n'est pas fonction des x'_i, pourront donc se mettre, en posant

$$-(m-1)V + U = H,$$

sous la forme suivante, dite canonique,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{dp_i}{dx}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{dx_i}{dx}.$$

et que nous étudierons spécialement dans un autre Chapitre.

XVIII. — Règle pour distinguer les maxima et les minima. Théorèmes préliminaires.

Théorème I. — *Si y est une solution de l'équation différentielle*

(1) $$A_0 y - \frac{d}{dx}(A_1 y') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n y^n) = 0,$$

dans laquelle $A_0, A_1, \ldots$ désignent des fonctions données

de x, y et de ses dérivées successives y', y'', ..., l'expression

$$y\left[A_0 u + \frac{d}{dx}(A_1 u') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n u^n)\right]$$

sera une dérivée exacte, quel que soit u, et son intégrale sera de la forme

$$B_1\left(\frac{u}{y}\right) + \frac{d}{dx}\left[B_2\left(\frac{u}{y}\right)'\right] + \ldots + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[B_n\left(\frac{u}{y}\right)^n\right],$$

B_1, B_2, ... *désignant des fonctions de x indépendantes de u.*

Ce théorème de Jacobi peut servir, comme on voit, à trouver une seconde intégrale de (1), quand on en connaît déjà une; il a été démontré comme il suit par M. Heine (*Journal de Crelle*, t. 54).

Posons

$$(2) \qquad 2Z = \int A(u^n)^2\,dx,$$

A désignant une fonction de x invariable de forme, et supposons u et ses dérivées invariables aux limites de l'intégrale : nous aurons, en différentiant avec la caractéristique δ,

$$\delta Z = \int A\,u^n\,\delta u^n\,dx$$

et, en intégrant par parties,

$$\delta Z = \pm \int \frac{d^n}{dx^n}(A\,u^n)\,\delta u\,dx.$$

Posons alors $u = ty$ ou $t = \frac{u}{y}$, et nous aurons

$$(3) \qquad \delta Z = \pm \int y\,\delta t\,\frac{d^n}{dx^n}(A\,u^n)\,dx.$$

Posons maintenant $u = ty$ dans l'équation (2) : nous aurons

$$2Z = \int A[(ty)^n]^2\,dx = \int A(ty^n + nt'y^{n-1} + \ldots + t^n y)^2\,dx.$$

Intégrons par parties; si l'on intègre un terme de la forme $\mathrm{A}\,t^p y^q$, il est clair que l'on pourra le ramener à la forme

$$\int \mathrm{C}(t^p)^2\,dx,$$

en sorte que l'on pourra écrire

$$2\mathrm{Z} = \int [\mathrm{C}_0 t^2 + \mathrm{C}_1 t'^2 + \ldots + \mathrm{C}_n (t^n)^2]\,dx,$$

et, en différentiant,

$$\delta\mathrm{Z} = \int \left[\mathrm{C}_0 t - \frac{d}{dx}(\mathrm{C}_1 t') + \ldots \pm \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{C}_n t^n)\right] dx\,\delta t.$$

La comparaison de cette formule avec (3) montre que l'on peut écrire, en supprimant le signe $\pm$ qui est inutile,

$$y\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{A}u^n) = \mathrm{C}_0 t - \frac{d}{dx}(\mathrm{C}_1 t') - \ldots \pm \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{C}_n t^n);$$

faisons dans cette formule successivement $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots$ et ajoutons les résultats : nous aurons

$$y\left[\mathrm{A}_0 u + \frac{d}{dx}(\mathrm{A}_1 u') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{A}_n u^n)\right]$$
$$= \mathrm{B}_0 t + \frac{d}{dx}(\mathrm{B}_1 t') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{B}_n t^n).$$

L'identification donne immédiatement $y\mathrm{A}_n \dfrac{d^n u^n}{dx^n} = \mathrm{B}_n \dfrac{1}{y}\dfrac{d^n u^n}{dx^n}$ ou $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n y^2$: d'ailleurs t est égal à $\dfrac{u}{y}$; si donc on fait $u = y$, on a

$$y\left[\mathrm{A}_0 y - \frac{d}{dx}(\mathrm{A}_1 y') + \ldots\right] = \mathrm{B}_0;$$

donc B_0 est nul si y satisfait à (1) et le théorème se trouve démontré. Lebesgue a démontré ce théorème différemment (t. VI du *Journal de Liouville*, 1re série); Delaunay également, dans le même Volume.

THÉORÈME II. — *La variation seconde de l'intégrale*

$$(4) \qquad u = \int F\,dx,$$

dans laquelle F *désigne une fonction de* $x, y, y' = \frac{dy}{dx}, \ldots,$ y *étant une fonction invariable, ainsi que ses dérivées, aux limites de l'intégrale, a pour expression*

$$\delta^2 u = \int \delta y\,dx \left[A_0\,\delta y + \frac{d}{dx}(A_1\,\delta y') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n\,\delta y^n) \right],$$

$A_1, A_2, \ldots$ *désignant des expressions indépendantes de* $\delta y, \delta y', \ldots$; *d'ailleurs*

$$A_n = \pm \frac{\partial^2 F}{\partial (y^n)^2}.$$

La démonstration suivante est encore de M. Heine. On a d'abord

$$\delta u = \int \sum \frac{\partial F}{\partial y^i}\,\delta y^i\,dx;$$

faisons maintenant varier une seconde fois cette formule, mais avec une autre caractéristique δ' relative à de nouveaux paramètres supposés contenus dans y; nous aurons

$$\delta'\delta u = \int \sum \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}(\delta y^i \delta' y^j + \delta' y^i \delta y^j)\,dx.$$

Considérons un terme du second membre

$$(5) \qquad \int \frac{dA}{dx}(\delta y^i \delta' y^j + \delta' y^i \delta y^j)\,dx;$$

l'intégration par parties permettra de le ramener à la forme

$$\int \frac{dA}{dx}(\delta y^i \delta' y^j + \delta' y^i \delta y^j)\,dx$$
$$= -\int A(\delta y^{i+1} \delta' y^j + \delta' y^{i+1} \delta y^j)\,dx - \int A(\delta y^i \delta' y^{j+1} + \delta' y^i \delta y^{j+1})\,dx$$

et, par conséquent, à des termes de la forme (5) dans lesquels

on pourra supposer $i=j$ ou $i=j+1$; dans ces derniers cas, on voit que

$$\int A(\delta y^i \delta' y^{i+1} + \delta' y^i \delta y^{i+1})\,dx = \int A \frac{d}{dx}(\delta y^i \delta' y^i)\,dx$$
$$= -\int \frac{dA}{dx}\,\delta y^i \delta' y^i\,dx;$$

et, par conséquent, $\delta\delta' u$ se ramène à la forme

$$\delta\delta' u = \int (A_0 \delta y \delta' y - A_1 \delta y' \delta' y' + \ldots \pm A_n \delta y^n \delta' y^n)\,dx,$$

ou

$$(6)\quad \delta\delta' u = \int \left[A_0 \delta y + \frac{d}{dx}(A_1 \delta y') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n \delta y^n)\right]\delta' y\,dx.$$

D'un autre côté, on peut mettre $\delta' u$ sous la forme

$$\delta' u = \int \Omega\,\delta' y\,dx,$$

Ω ne contenant plus $\delta' y$, et d'ailleurs

$$\Omega = 0$$

est l'équation différentielle qui fournit le maximum ou le minimum. En différentiant avec la caractéristique δ, on a

$$\delta\delta' u = \int (\delta\Omega\,\delta' y + \Omega\,\delta\delta' y)\,dx$$

ou, en supposant $\Omega = 0$,

$$\delta\delta' u = \int \delta\Omega\,\delta' y\,dx;$$

comparant cette formule avec (6), on en déduit

$$(7)\qquad \delta\Omega = A_0 \delta y + \frac{d}{dx}(A_1 \delta y') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n \delta y^n).$$

Or on a

$$\delta u = \int \Omega\,dx\,\delta y,$$
$$\delta^2 u = \int \Omega\,dx\,\delta^2 y + \int \delta\Omega\,\delta y\,dx,$$

et, comme $\Omega = 0$,

$$\delta^2 u = \int \delta\Omega\, \delta y\, dx$$

ou, en vertu de (7),

$$(8)\qquad \delta^2 u = \int \left[A_0 \delta y + \frac{d}{dx}(A_1 \delta y') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n \delta y^n) \right] \delta y\, dx;$$

d'ailleurs, il est clair que

$$(9)\qquad A_n = \pm \frac{\partial^2 F}{\partial (y^n)^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

XVIII. — Application des théorèmes précédents.

Conservons les notations du paragraphe précédent et proposons-nous de voir si la valeur de y tirée de l'équation $\Omega = 0$ rend l'intégrale u, dans laquelle les limites sont fixes, maximum ou minimum; à cet effet, il faudra calculer $\delta^2 u$ et voir si la valeur de y tirée de $\Omega = 0$ rend $\delta^2 u$ toujours négatif ou toujours positif; nous prendrons $\delta^2 u$ sous la forme (8) que nous venons de calculer, et nous allons lui faire subir quelques transformations destinées à mettre son signe en évidence.

Soit $\delta y = v$ une solution de l'équation $\delta\Omega = 0$; posons

$$\delta y = v\, \delta' y,$$

nous aurons, au lieu de (8),

$$\delta^2 u = \int v\, \delta' y \left[A_0 \delta y + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(A_n \delta y^n) \right] dx$$

et, en vertu du théorème I,

$$\delta^2 u = \int \delta' y \left[\frac{d}{dx}(B_1 \delta' y') + \ldots + \frac{d^n}{dx^n}(B_n \delta' y^n) \right] dx$$

$$= -\int \delta' y' \left[B_1 \delta' y' + \ldots + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(B_n \delta' y^n) \right] dx.$$

Dans cette nouvelle expression de $\delta^2 u$ la quantité placée sous le signe $\int$ a la même forme que dans l'ancienne, mais

elle contient un terme de moins. Quand on connaîtra une intégrale de $B_1 \delta' y' + \ldots + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (B_n \delta' y^n) = 0$, on la simplifiera encore et on la ramènera à la forme

$$\delta^2 u = \int \delta'' y'' \left[C_2 \delta'' y'' + \ldots + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (C_n \delta'' y^n) \right] dx,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à une expression telle que

(10) $$\delta^2 u = \int P_n \delta^n y^n \, dx.$$

Or on a (p. 405)

$$A_n = \pm \frac{\partial^2 F}{(\partial y^n)^2}, \qquad B_n = A_n y^2, \qquad C_n = B_n \delta y^2, \qquad \ldots;$$

d'où l'on tire

$$P_n = \pm \frac{\partial^2 F}{(\partial y^n)^2} y^2 \delta y^2 \ldots (\delta^n y^n)^2,$$

et, finalement,

$$\delta^2 u = \int \pm \frac{\partial^2 F}{(\partial y^n)^2} K^2 \, dx,$$

K^2 désignant un carré parfait. Pour que l'intégrale u soit maxima ou minima, il faudra donc que $\frac{\partial^2 F}{(\partial y^n)^2}$ conserve toujours le même signe; car, K étant arbitraire, si $\frac{\partial^2 F}{(\partial y^n)^2}$ pouvait changer de signe, on pourrait faire en sorte, en choisissant convenablement K, que $\delta^2 u$ prenne un signe arbitraire.

Si les limites de l'intégrale u étaient variables, après avoir déterminé y au moyen de l'équation $\Omega = 0$, il faudrait déterminer les constantes contenues dans l'expression de y par la méthode ordinaire des maxima.

Un mot encore avant de terminer : il reste à montrer comment on peut intégrer les équations

(11) $$\delta\Omega = 0, \qquad \text{ou} \qquad A_0 \delta y + \frac{d}{dx}(A_1 \delta y') + \ldots = 0,$$

(12) $$B_1 \delta' y' + \frac{d}{dx}(B_2 \delta' y'') + \ldots = 0, \qquad \ldots.$$

L'équation $\Omega = 0$ a pour solution une expression y de la forme

$$y = f(x, a, b, \ldots),$$

$a, b, c, \ldots$ désignant des constantes arbitraires; $\Omega + \delta\Omega = 0$ sera satisfaite en prenant l'inconnue égale à $f + \delta f$, et $\delta\Omega = 0$ en prenant pour inconnue δf, ou

$$\frac{\partial f}{\partial a}\delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\delta b + \ldots,$$

$\delta a, \delta b, \ldots$ désignant des fonctions arbitraires que l'on peut aussi désigner par $\alpha, \beta, \ldots$. Ainsi l'équation (11) peut être intégrée sans difficulté. Pour intégrer l'équation (12), on remarque que, si δy satisfait à (11), $\delta' y'$ ou $\frac{\delta y}{y}$ rend constant le premier membre de (12); mais on peut prendre

$$\delta' y' = \frac{1}{f}\left(\alpha' \frac{\partial f}{\partial a} + \beta' \frac{\partial f}{\partial b} + \ldots\right),$$

$\alpha', \beta', \ldots$ désignant de nouvelles constantes que l'on déterminera de manière que la constante à laquelle est égal le premier membre de (12) soit nulle, et ainsi de suite.

C'est Legendre [(1786), *Mémoires de l'Académie des Sciences*] qui a indiqué, pour la première fois, une méthode pour distinguer les maxima et les minima des intégrales définies. Lagrange est revenu sur cette question dans ses *Fonctions analytiques*. Jacobi a donné ensuite (t. III du *Journal de Liouville*, 1[re] série) la méthode que nous avons exposée. L'analyse de Jacobi a été ensuite perfectionnée par Delaunay (*Journal de Liouville*, t. VI, 1[re] série) et par Hesse (*Journal de Crelle*, t. 54).

Le *Calcul des variations* a pris naissance en 1696 à propos du problème de la brachistochrone ou courbe de plus vite descente, posé par Jean Bernoulli dans les *Acta eruditorum*, et en 1697, à propos du fameux problème des isopérimètres

(*Journal des Savants*), qui fut l'occasion d'une longue polémique entre Jean et Jacques Bernoulli. Plus tard, Euler fit connaître une méthode générale pour la recherche du maximum des intégrales dans un Ouvrage intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Mais c'est à Lagrange que l'on doit la notation et la méthode qu'on emploie aujourd'hui, méthode qu'Euler a appelée *Calcul des variations*. [*Voir* deux Mémoires d'Euler, t. X des *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg*, 1766. — Les *Œuvres de Lagrange*, t. I et II. — Les *Nouveaux Exercices de Mathématiques* de Cauchy, t. III. — Sarrus, *Recherches sur le Calcul des variations* (*Savants étrangers*, t. X, 1848).] Parmi les Traités imprimés sur le *Calcul des variations* en francais, nous citerons celui de MM. Lindelöf et Moigno, publié chez Gauthier-Villars.

EXERCICES ET NOTES.

1. Trouver la ligne la plus courte que l'on puisse tracer entre deux points sur une surface développable. On montrera que la solution se ramène aux quadratures.

N.-B. On trouvera de nombreux développements sur les lignes géodésiques dans le 7e Volume.

2. Trouver une courbe plane de longueur donnée passant par deux points fixes, et qui, par sa révolution autour d'une droite donnée située dans son plan, engendre une surface minimum.

3. Si p est différent de un, et si u est une fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et de $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$, homogène et de degré p par rapport à ces dérivées, l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} u\,dx$ est maxima ou minima quand u est constant.

4. Parmi toutes les courbes de courbure constante que l'on peut faire passer par deux points, quelle est la plus courte?

5. Parmi les courbes planes qui, tournant autour de l'axe des x, et qui, passant par deux points fixes, engendrent une surface de révolution d'aire donnée, trouver celle pour laquelle le trapèze limité par les ordonnées de ses extrémités et par l'axe des x engendre le volume maximum.

6. Étant donnée une surface S et une courbe C tracée sur cette surface, faire passer, par deux points A et B de cette courbe, une autre courbe tracée sur la surface, telle que l'aire comprise entre cette courbe et C ait une valeur maxima. (La courbe cherchée jouit de cette propriété que la projection de son rayon de courbure sur le plan tangent à S est constante.)

7. Trouver sur une surface le plus court chemin d'un point à un autre, en rencontrant une courbe donnée tracée sur la surface. (Montrer que le chemin demandé est une géodésique qui se brise sur la courbe donnée en faisant des angles égaux avec cette courbe.)

8. De toutes les courbes planes passant par deux points donnés, trouver celle dont le moment d'inertie relatif à l'axe des x est minimum. (On achève la solution au moyen des fonctions elliptiques.)

FIN DU TOME CINQUIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME V.

CHAPITRE I.

Généralités sur les équations différentielles.

CHAPITRE II.

Équations du premier ordre.

CHAPITRE III.

Des équations linéaires

CHAPITRE IV.

*Étude de quelques équations linéaires.

CHAPITRE V.

Intégration des équations d'ordre supérieur non linéaires.

CHAPITRE VI.

Équations différentielles simultanées.

CHAPITRE VII.

*Théorie des fractions continues.

CHAPITRE VIII.

Calcul des variations des intégrales simples.

FIN DE LA TABLE DU TOME CINQUIÈME.

ERRATA.

Tome IV (*suite*).

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
39	8	$y - \beta$	$y - b$
49	19	$c' z$	$c' z'$
68	10	$p(p-1)x^{p-2} + \ldots$	$p(p-1)\mathrm{A}x^{p-2} + \ldots$
157	8 en remontant	$x_p x_{p+1}$	$x_{p-1} x_p$

332 après ou bien à l'avant-dernière ligne, ajoutez ces mots : en changeant φ_0 en $\varphi_0 - n\theta$, et page 333, ligne 4, ajoutez : modifiée en remplaçant φ_0 par $\varphi_0 - n\theta$,

$$x^2 + m^2 y^2 - \frac{z^2}{\mathrm{cn}^2 \varphi_0} = 0,$$

et supprimez les trois lignes suivantes.

Tome V.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
6	3	$\int^{\mathrm{T}}$	$\int_{t_0}^{\mathrm{T}}$
35	3 en remontant	x'	y'
47	5 et 7 en remontant	$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}$	$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$
55	7 en remontant	$= \frac{\mathrm{Q}\,dz}{\mathrm{P} + \mathrm{Q}z}$	$= -\frac{\mathrm{Q}\,dz}{\mathrm{P} + \mathrm{Q}z}$
55	3 et 5 en remontant	ajouter un moins devant l'intégrale.	
57	1 en remontant	$= \frac{b\,d\eta_1 - b'\,d\xi}{a\,d\eta_1 - a'\,d\xi}$	$= \frac{-b\,d\eta_1 + b'\,d\xi}{a\,d\eta_1 - a'\,d\xi}$
57	3 en remontant	$= \frac{b(\eta_1 - c') - b'(\xi - c)}{ab' - ba'}$	$= \frac{-b(\eta_1 - c') + b'(\xi - c)}{ab' - ba'}$
69	2	également	en termes finis
70	dernière ligne	$\frac{y}{1 + y'^2}$	$-\frac{y'}{1 + y'^2}$
122	14 et 17	$\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_0}$	$\frac{\mathrm{X}_1}{n\mathrm{X}_0}$
123	2	y	y_1

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
139	14	$\sum c_i y^{n-1}$	$\sum c'_i y_i^{n-1}$
144	12 en remontant	$F(z_i)$	$F(z)$
144	12 en remontant	c'	c'_i
171	4 en remontant	$e^{-\int \frac{B}{A} dt}$	$-e^{\int \frac{B}{A} dt}$
176	8	$A z z'^{n-1} + B z^2$	$A z'^{n-1} + B z$
176	9	$z^{n-1} z'$	$z^{n-2} z'$
187	12	$\frac{x^2 - 1}{2}$	$\frac{z^2 - 1}{2}$
187	6 en remontant	x^2	t^2
198	6	z	2
209	9	X_n	X_n^2
213	4	e^{-x}	e^{-x^2}
214	7	$(n-1)$	$2n$
226	1 en remontant	$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta y$
226	5 en remontant	$a_0 = 0$	$a_0 = 1$
226	8 en remontant	$n + \gamma$	$(n+1)(n+\gamma)$
233	8	$-\mu$	$+\mu$
234	6	$\frac{1}{z^n}$	$\frac{1}{2^n}$
236	8	$\frac{n(n+1)}{x^2}$	$\frac{2}{x^2}$
236	14	$\frac{x^2}{n(n+1)}$	$\frac{x^2}{2} y'$
241	2	F''	F^n
256	12	$x = \sqrt{\ldots}$	$x = \frac{1}{c} \sqrt{\ldots}$
256	14	x^2	$c^2 x^2$
303	2, 3, 9	$e^{\epsilon(t-\mu}$	$e^{\epsilon(t_0-\mu)}$
309	2 et 3	a^2	$-a^4$

14351 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

